

Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 1

3 ottobre 2008

Esercizio 1. Siano dati i punti $p = (1, 3)$, $q = (1, 1)$ ed $r = (4, -1)$ nel piano. Trovare un punto s tale che i vettori geometrici \vec{pq} ed \vec{rs} siano equipollenti.

Esercizio 2. Consideriamo l'insieme \mathbb{R}^n con l'usuale operazione di somma. Diamo la seguente operazione di prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, \mathbf{x}) &\longrightarrow \lambda \mathbf{x} = (\lambda^2 x_1, \dots, \lambda^2 x_n).\end{aligned}$$

Verificare che con questa operazione \mathbb{R}^n non è uno spazio vettoriale. Quale delle proprietà che definiscono uno spazio vettoriale non vale?

Al contrario consideriamo \mathbb{R}^n con l'usuale operazione di prodotto per uno scalare, ma modifichiamo la somma, ponendo

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n).\end{aligned}$$

In questo caso l'elemento neutro della somma è

$$\underline{0} = (1, \dots, 1).$$

Verificare che con questa operazione \mathbb{R}^n non è uno spazio vettoriale. Quale delle proprietà che definiscono uno spazio vettoriale non vale?

Esercizio 3. Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{3 + 2i}{1 + i}; \quad \frac{(5 + i)(2 - i)}{3 - i}; \quad \frac{2 + i}{1 + i} - \frac{i}{1 - i}.$$

Esercizio 4. Risolvere l'equazione $iz^2 + (4 - i)z - 3(1 + i) = 0$.

Esercizio 5. Dimostrare che $\mathbb{Q}[\pi]$ non è un sottocampo di \mathbb{C} .

(Avrete bisogno del risultato di Lindemann che dice che π è numero trascendente, cioè non esiste nessun polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $f(\pi) = 0$.)

Esercizio 6. Dire se i seguenti insiemi di vettori di \mathbb{R}^3 sono linearmente indipendenti, e se sono una base:

$$\begin{aligned}&\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, -1, 1)\} \\ &\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), (0, 0, 1)\} \\ &\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1)\} \\ &\{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (0, -1, 2), (1, 2, 3)\}\end{aligned}$$

Esercizio 7. Mostrare che l'insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3 è uno spazio vettoriale, ed esibire una sua base.

Mostrare che il sottoinsieme formato dai polinomi che si annullano nel punto 1 è anch'esso uno spazio vettoriale. Sapreste trovarne una base?

Esercizio 8. Sia V l'insieme delle funzioni $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$; mostrare che V è uno spazio vettoriale.

Sia $W \subset V$ il sottoinsieme formato dalle funzioni che sono nulle da un certo punto in poi, ovvero delle funzioni f tali che esiste un intero n_0 per cui $f(n) = 0$ per ogni $n \geq n_0$ (l'intero n_0 pu dipendere da f !).

Mostrare che W è uno spazio vettoriale; sapreste esibirne una base?

Esercizio 9. Siano $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i, z_i)$ per $i = 1, 2, 3$ tre vettori linearmente indipendenti di \mathbb{R}^3 . Dimostrare che i vettori di \mathbb{C}^3 che hanno le stesse coordinate sono ancora linearmente indipendenti (su \mathbb{C}).

Esercizio 10. Consideriamo \mathbb{R} come spazio vettoriale su \mathbb{Q} . Dimostrare che per ogni n esistono $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ linearmente indipendenti su \mathbb{Q} .