

# Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 10

10 novembre 2008

## Gruppo 1

**Esercizio 1.** Calcolare il determinante delle matrici  $A$  e  $B$  e verificare che  $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ , dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & & \vdots \\ 3 & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \\ n & \cdots & & & 2n-1 \end{pmatrix}$$

la matrice  $n \times n$  con  $a_{ij} = i + j - 1$ . Dimostrare che  $\det A = 0$  se  $n \geq 3$ .

## Gruppo 2

**Esercizio 3.** Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari calcolate la matrice associata rispetto ad una base a scelta e quindi calcolate il determinante.

(1) La funzione  $f: \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mapsto \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  data da

$$f(p(x)) = p(2)x^2 + p(1)x + p(0).$$

(2) Dato lo spazio vettoriale  $V$  generato dalle funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$  e fissato  $t \in \mathbb{R}$ , l'applicazione  $g: V \mapsto V$  data da

$$g(\varphi(x)) = \varphi(x + t).$$

**Esercizio 4.** Siano  $v_1, \dots, v_n$  vettori di  $\mathbb{R}^n$ . Visto che ogni numero reale è un numero complesso, possiamo pensare ciascuno dei  $v_i$  come un vettore di  $\mathbb{C}^n$ . Dimostrare che  $\{v_1, \dots, v_n\}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$  se e solo se è una base di  $\mathbb{C}^n$ .

### Gruppo 3

**Esercizio 5.** Dati  $n + 1$  numeri  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , consideriamo la matrice di Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che se gli  $\alpha_i$  sono distinti, allora  $\det V \neq 0$ , secondo lo schema seguente:

- (1) L'unico polinomio  $p \in \mathbb{K}[x]_{\leq n}$  tale che  $p(\alpha_i) = 0$  per ogni  $i$  è il polinomio nullo.
- (2) Il problema precedente si riconduce ad un sistema lineare omogeneo la cui matrice è  $V$ , dunque  $V$  ha rango massimo

**Esercizio 6.** *Bonus per chi ha visto un po' di analisi.* Fissiamo  $k$  numeri  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  e interi positivi  $m_1, \dots, m_k$  con

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k + k = n + 1.$$

Seguendo lo schema dell'esercizio precedente, dimostrate che se

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1^2 & 4\alpha_1^2 & \dots & 2^{m_1}\alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & 2^{m_k}\alpha_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^n & n\alpha_1^n & n^2\alpha_1^n & \dots & n^{m_1}\alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & n^{m_k}\alpha_k^n \end{pmatrix}$$

è la matrice con coefficienti  $h^k \alpha_i^h$  per  $1 \leq k \leq m_i$ , allora  $\det V \neq 0$ .