

Alcuni esercizi in vista dell'esonero

20 novembre 2008

N. B. Questi sono alcuni esercizi che ho messo per preparazione all'esonero di domani (un po' tardivamente). **Non** sono gli esercizi dell'esonero con i numeri cambiati o qualcosa del genere. Buon lavoro!

Esercizio 1. Sia

$$F: M_{2,2}(\mathbb{R}) \mapsto M_{2,2}(\mathbb{R})$$

l'applicazione data da

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che F è lineare. Calcolare la dimensione di $\ker F$. Trovare la matrice associata a F rispetto alla base standard di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Verificare che vettori di \mathbb{C}^3 $v_1 = (1, i, 1 + i)$ e $v_2 = (1 - i, 2, 3)$ sono linearmente indipendenti e completarli ad una base dello spazio.

Esercizio 3. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Siano

$$V = \{B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}$$
$$W = \{AB - BA \mid B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})\}.$$

Esibire due matrici linearmente indipendenti in V e due in W ; calcolare quindi $\dim V$ e $\dim W$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ e sia $W \subset V$ definito da

$$W = \{p \in V \mid p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = 0\}.$$

Mostrare che W è un sottospazio ed esibirne una base.

Esercizio 5. Trovare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il sottospazio di \mathbb{R}^4 generato dai vettori $(1, 1 + t, 2, -1)$, $(t, 3, 0, 1)$ e $(1, 3, 4, -1)$ ha dimensione 2?

Esercizio 7. Esibire due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tali che $AB \neq BA$ e verificare che $\det(AB) = \det(BA)$.

Esercizio 8. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 12}$ e sia $f: V \rightarrow V$ l'applicazione lineare data da

$$f(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x}.$$

Calcolare $\det f$ e $\det(\mathbf{I} + f)$.