Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 12

28 novembre 2008

Esercizio 1. Quali delle seguenti forme bilineari $\phi\colon V \times V \mapsto \mathbb{R}$ sono simmetriche? Quali sono definite positive?

(i) Nello spazio $V = \mathbb{R}^2$,
$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

(ii) Nello spazio $V = \mathbb{R}^3$,
$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 + 2x_2)(y_1 + y_2 - 2y_3) + (y_1 + 2y_2)(x_1 + x_2 - 2x_3).$$

(iii) Nello spazio $V = \mathbb{R}^2$,
$$\phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Nello spazio $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$,
$$\phi(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Cosa cambia se ϕ è data dalla stessa espressione ma $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$?

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e siano $L, M\colon V \mapsto \mathbb{R}$ applicazioni lineari. È vero che
$$\phi(v, w) = L(v) + M(w)$$
è bilineare? E
$$\psi(v, w) = L(v) \cdot M(w)?$$

Esercizio 3. Su $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'applicazione bilineare
$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = x_1 y_1 + 4x_2 y_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_3.$$
Mostrate che $(\cdot|\cdot)$ è un prodotto scalare (definito positivo!) e trovate una base ortonormale.

Esercizio 4. Sia
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$
una matrice simmetrica 2×2 a coefficienti reali e sia ϕ l'applicazione bilineare simmetrica associata (rispetto alla base standard). Mostrate che ϕ è definita positiva se e solo se $a > 0$ e $\det A > 0$.

(Sugg. Sia v un vettore con $\phi(v, v) \leq 0$. Se $v \neq e_1$ possiamo, a meno di riscalare v, scrivere $v = te_1 + e_2$ per qualche $t \in \mathbb{R}$. Quanto vale $\phi(v, v)$?)

Esercizio 5. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare l'angolo tra i vettori e_1 e e_2 della base standard.

Esercizio 6. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 = 1$. In $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare standard sia θ l'angolo tra i vettori e_1 e (a, b). Mostrare che $\cos\theta = a$. Dedurne che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

rappresenta la rotazione di un angolo $\theta = \arccos a$.

Esercizio 7. Consideriamo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare dato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

A partire dalla base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ ottenere una base ortonormale tramite l'algoritmo di Gram-Schmidt.

Esercizio 8. Siano a, b, c tre numeri reali positivi. Dimostrare che

$$(a\sqrt{c} + b\sqrt{a} + c\sqrt{b})^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c).$$

Per quali valori di a, b, c vale l'uguaglianza?