

Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 13

1 dicembre 2008

Gruppo 1

Esercizio 1. Trovare una base ortonormale del piano in \mathbb{R}^3 di equazione $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

Esercizio 2. Trovare una base ortonormale dello spazio delle matrici reali 2×2 a traccia nulla, rispetto al prodotto scalare

$$(A|B) = \text{tr}({}^tAB).$$

Gruppo 2

Esercizio 3. Consideriamo \mathbb{R}^4 con il prodotto scalare standard e sia W il sottospazio generato da $v_1 = (1, 2, 1, 2)$ e $v_2 = (0, -1, 1, 1)$. Trovare le equazioni cartesiane e una base di W^\perp .

Esercizio 4. Sia V il sottospazio di \mathbb{R}^5 di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Trovare le equazioni cartesiane e una base di $\text{Ann}(V) \subset (\mathbb{R}^5)^*$.

Gruppo 3

Esercizio 5. Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ indichiamo (solo per questo esercizio) con $\mathcal{P}(A)$ il parallelepipedo generato dalle colonne di A , ovvero

$$\mathcal{P}(A) = \{\lambda_1 A^1 + \dots + \lambda_n A^n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

e con $\text{vol}(A)$ il volume di $\mathcal{P}(A)$. Dovreste aver visto a lezione che

$$\text{vol}(A) = |\det A|.$$

In questo esercizio vi propongo un modo alternativo di dimostrare quest'uguaglianza.

- (i) Se le colonne di A sono linearmente dipendenti si ha $\text{vol}(A) = |\det A| = 0$. Possiamo dunque supporre che le colonne siano linearmente indipendenti.
- (ii) Sia $\text{vol}(A)$ che $\det A$ non cambiano se ad una colonna si somma un multiplo di un'altra.
- (iii) Utilizzando il processo di Gram-Schmidt ci riconduciamo a dimostrare l'uguaglianza quando le colonne di A sono una base ortogonale.

- (iv) Riscalando ci riconduciamo a dimostrare l'uguaglianza quando le colonne di A sono una base *ortonormale*.
- (v) In questo caso dimostrate che $\text{vol}(A) = |\det A| = 1$ (e dunque l'uguaglianza è dimostrata in generale).

Esercizio 6. Sia $A \in O(n)$ una matrice ortogonale, e supponiamo che $A = {}^tA$.

- (i) Sia $W = \ker(A - I) \subset \mathbb{R}^n$. Mostrare che $\text{im}(A - I) = W^\perp$.
- (ii) Se $w_1 \in W$ allora $Aw_1 = w_1$. Se invece $w_2 \in W^\perp$ allora $Aw_2 = -w_2$.
- (iii) Ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come $v = w_1 + w_2$ con $Aw_1 = w_1$ e $Aw_2 = -w_2$.

L'applicazione lineare associata ad A è detta *riflessione* rispetto a W .