Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 14

10 dicembre 2008

Gruppo 1

Esercizio 1. Sia $r \subset \mathbb{R}^2$ la retta di equazione $x + 2y = 1$. Trovare la parallela a r passante per $p = (1, 3)$ e l'intersezione di questa con la retta s di equazione $-x - y = 2$.

Esercizio 2. Siano $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta passante per i punti $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$ e $P \subset \mathbb{R}^3$ il piano passante per i punti $(1, 1, 1)$, $(0, 2, -1)$ e $(1, 2, 0)$. Determinare le coordinate del punto di intersezione di r e P.

Esercizio 3. Siano $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazione $x = y = 0$ e $s \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazione $x + y = z = 1$. Trovare due punti $p \in r$ e $q \in s$ tali che p, q siano allineati con $(2, 3, 4)$.

Gruppo 2

Esercizio 4. Trovare una base ortonormale del sottospazio definito $\mathbb{R}^4$ dalle equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Consideriamo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard e sia W il sottospazio generato da $v_1 = (1, 2, 1, 2)$ e $v_2 = (0, -1, 1, 1)$. Trovare le equazioni cartesiane e una base di $W^\perp$.

Esercizio 6. Sia W il sottospazio 2-dimensionale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$g_1 = (1, 0, 1, 0), \qquad g_2 = (0, 1, 0, 1).$$

Si consideri il vettore

$$h_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Sia U il sottospazio generato dai vettori g_1, g_2, h_1.

i) Determinare equazioni cartesiane per il sottospazio W.

ii) Sia h_2 l'unico vettore generatore di $U^\perp$ verificante le due condizioni

$$\|h_2\| = 1, \qquad (h_2|e_2) > 0.$$

Determinare le coordinate di h_2.

iii) Verificare che h_1, h_2 costituiscono una base ortogonale di $W^\perp$.