

Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 15

15 dicembre 2008

Gruppo 1

Esercizio 1. Siano $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta passante per i punti $(0, 0, 1)$ e $(1, 2, 3)$ e $P \subset \mathbb{R}^3$ il piano passante per il punto $(1, -1, 0)$ e ortogonale al vettore $(-1, 2, -1)$. Determinare le coordinate del punto di intersezione di r e P .

Esercizio 2. Determinare un'equazione cartesiana per il piano $P \subset \mathbb{R}^3$ passante per la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - 2z = -3 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

e parallelo alla retta s di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$$

Gruppo 2

Esercizio 3. Dire se il punto $p = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio affine generato dai punti

$$a = (2, -3, -2), \quad b = (2, -1, 0), \quad c = (0, 1, 2)$$

e in caso affermativo determinare le sue coordinate affini rispetto ad $\{a, b, c\}$.

Esercizio 4. Consideriamo i punti in \mathbb{R}^3

$$a = (2, 1, 0), \quad b = (2, -1, 0), \quad c = (0, 1, 1).$$

Siano p e q i punti con coordinate affini $(-1, 2, 0)$ e $(-1, 1, 1)$ rispetto ad $\{a, b, c\}$. Determinare equazioni cartesiane per la retta \overline{pq} .

Gruppo 3

Esercizio 5. Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d'. \end{cases}$$

Chiamiamo *vettore direzione* di r un qualsiasi generatore della giacitura di r . Dimostrare che un vettore direzione per r è $(d_1, -d_2, d_3)$, dove d_i è il determinante del minore che si ottiene dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

omettendo la i -esima colonna.

(Sugg. Considerate la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} :$$

qual è il suo determinante?)

Esercizio 6. Identifichiamo \mathbb{R}^n con il sottospazio affine H di \mathbb{R}^{n+1} definito da $x_{n+1} = 1$, associando al vettore $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ il vettore $\mathbf{v}' = (x_1, \dots, x_n, 1) \in H$.

Dimostrare che ogni affinità di $\mathbb{R}^n \cong H$ si estende in modo unico ad un'applicazione lineare da \mathbb{R}^{n+1} in sé e viceversa ogni applicazione lineare che fissa H si restringe ad un'affinità di \mathbb{R}^n . Dimostrare che questo dà un isomorfismo tra il gruppo delle affinità di \mathbb{R}^n e il gruppo delle applicazioni lineari su \mathbb{R}^{n+1} che fissano H .