

Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 17

9 gennaio 2009

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori delle matrici seguenti, e trovare i relativi autospazi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Costruire un esempio di una matrice 3×3 a coefficienti reali che sia diagonalizzabile su \mathbb{C} ma non su \mathbb{R} , e una che non sia diagonalizzabile su \mathbb{C} .

Esercizio 3. Trovare gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

e quelli della matrice $B = A + 2I$. Qual 'e la relazione tra gli autovalori? Dopo aver trovato gli autospazi delle due matrici, stabilire la relazione esistente.

Esercizio 4. Dire se le matrici seguenti sono diagonalizzabili su \mathbb{R} , e in caso positivo trovare un cambiamento di base che le renda diagonali:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica e siano v, w due autovettori per A , relativi agli autovalori λ e μ rispettivamente. Dimostrare che se $\lambda \neq \mu$, allora v e w sono ortogonali (rispetto al prodotto scalare standard su \mathbb{R}^n).

Esercizio 6. Sia $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice ortogonale e sia λ un autovalore *complesso* per A . Dimostrare che $|\lambda| = 1$.