Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 18

12 gennaio 2009

Gruppo 1

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori delle matrici seguenti, e trovare i relativi autospazi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base standard, e sia $f_k \colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ($k \in \mathbb{R}$) l'applicazione lineare definita da

$$f_k(e_1) = -e_1, \qquad f_k(e_2) = e_2 + ke_3, \qquad f_k(e_3) = -k(e_1 - e_3).$$

Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ f_k è diagonalizzabile.

Gruppo 2

Esercizio 3. Determinare se le matrici seguenti sono coniugate fra loro:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Calcolare A^{10}, dove A è la matrice dell'esercizio precedente.

Gruppo 3

Il significato dei prossimi esercizi verrà un po' chiarito ad esercitazione.

Esercizio 5. Una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ si dice *stocastica* se i suoi coefficienti sono ≥ 0 e la somma dei coefficienti su ciascuna colonna è 1. Dimostrare che una matrice stocastica ha sempre l'autovalore 1.

Esercizio 6. Sia A una matrice stocastica con coefficienti *strettamente positivi.* Dimostrare, secondo lo schema seguente, che $\dim V_1(A) = 1$.

- Se v è un autovettore per A con autovalore 1, le componenti di v hanno tutte lo stesso segno (sugg: usate la disuguaglianza triangolare).
- Se v e w sono linearmente indipendenti esiste una combinazione lineare di v e w che ha componenti di segno opposto.
- L'autospazio per A relativo all'autovalore 1 ha dimensione 1.