Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 2

6 ottobre 2008

Esercizio 1. Siano dati i seguenti punti nel piano. Dire se i vettori geometrici $\overrightarrow{pq}$ e $\overrightarrow{p'q'}$ sono equipollenti.

$$p = (1,2) \quad q = (3,1) \quad p' = (-1,1) \quad q' = (1,0)$$
$$p = (0,2) \quad q = (3,-1) \quad p' = (1,1) \quad q' = (2,0)$$
$$p = (0,0) \quad q = (-1,3) \quad p' = (3,3) \quad q' = (2,6).$$

Esercizio 2. Sia $z = 8 + 6i \in \mathbb{C}$. Quali sono le radici quadrate di z?

Esercizio 3. Dimostrare l'identità

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta).$$

Ricavarne una formula chiusa per $\cos(k\theta)$ e $\sin(k\theta)$ in termini di $\cos\theta$ e $\sin\theta$.

Esercizio 4. Siano $w = 3 + i$ e $z = 2 + 2i$. Dimostrare che $\{w, z\}$ è una base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso non nullo. Dimostrare che z e iz sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$.

Esercizio 6. Dire se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti, e se sono una base:

$$\{(1,1),(0,3)\}$$
$$\{(0,1),(2,1),(1,2)\}$$
$$\{(4,2),(6,3)\}$$

Esercizio 7. Dire se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, e se sono una base:

$$\{(-1,2,1),(2,3,4),(1,0,0)\}$$
$$\{(5,1,2),(2,1,-1),(4,-1,5)\}$$
$$\{(2,1,0),(3,4,1)\}$$
$$\{(2,2,1),(1,0,-3),(1,0,3),(2,1,-1)\}$$

Esercizio 8. Mostrare che l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali di grado al più 2 è uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$, ed esibire una sua base.

Mostrare che il sottoinsieme formato dai polinomi che si annullano nel punto -2 è anch'esso uno spazio vettoriale. Sapreste trovarne una base?

Esercizio 9. Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$. Su V definiamo la somma ponendo

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' - 1)$$

e la moltiplicazione per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ ponendo

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z + 1 - \lambda).$$

Notiamo che queste non sono le operazioni che usiamo solitamente, ad esempio la somma usuale di due elementi di V non è contenuta in V. Dimostrare che al contrario queste operazioni sono a valori in V, e rendono V uno spazio vettoriale. Bonus: trovare una base di V.