

## Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 20

23 gennaio 2009

**Esercizio 1.** Calcolare gli autovalori delle matrici seguenti, vedere se sono diagonalizzabili e in caso affermativo trovare una base che le renda diagonali:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Determinare se esiste un'affinità  $f$  del piano tale che  $f(P_i) = Q_i$  per ogni  $i = 1, \dots, 4$  dove

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 0), \quad P_3 = (2, 1), \quad P_4 = (1, 1) \\ Q_1 = (-1, 0), \quad Q_2 = (1, 1), \quad Q_3 = (2, 0), \quad Q_4 = (0, -2).$$

**Esercizio 3.** Sia  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  una matrice con polinomio caratteristico  $p_A(t) = (t-1) \cdot (t-2)^2$ . Dimostrare che se  $A$  non è diagonalizzabile, allora è coniugata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

tramite i passi seguenti.

- (i) Sia  $\{v_1, v_2, v_3\}$  una base con  $v_1$  autovettore di autovalore 1 e  $v_2$  autovettore di autovalore 2. Allora in questa base l'applicazione lineare associata ad  $A$  si rappresenta con una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (ii) Sottraendo a  $v_3$  un opportuno multiplo di  $v_1$  possiamo ricondurci ad una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & ? \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Riscalando  $v_3$  ci riconduciamo alla matrice voluta.

**Esercizio 4.** Sia  $U \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio generato da  $(1, 0, 2, 1)$  e  $(0, 0, -1, 1)$  e sia  $V \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio di equazioni

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Determinare la dimensione di  $U^\perp \cap V^\perp$ .

**Esercizio 5.** Sia  $V \subset \mathbb{R}^4$  il sottospazio generato da  $(1, 2, 0, 0)$  e  $(0, 1, -1, 0)$ . Trovare una base ortonormale di  $V$  e una base (qualsiasi) di  $\text{Ann}(V) \subset (\mathbb{R}^4)^*$ .

**Esercizio 6.** Siano  $r$  ed  $s$  le rette dello spazio affine date rispettivamente da

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + z = -1 \\ -x - y + z = 1 \end{cases} .$$

Determinare se  $r$  ed  $s$  sono incidenti, parallele o sghembe.