Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 3

10 ottobre 2008

Esercizio 1. Verificare che i seguenti insiemi di vettori in $\mathbb{R}^3$ e in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti. Completarli ad una base dello spazio.

$$\{(1,1,0),\ (1,0,1)\}$$
$$\{(2,0,-1),\ (1,1,3)\}$$
$$\{(1,1,0,2),\ (1,0,1,0),\ (0,1,3,1)\}.$$

Esercizio 2. Indichiamo con $\mathbb{K}[x]_{\leq d}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$ di grado al più d. Verificare che x, $x+1$ e x^2+1 sono linearmente indipendenti in $\mathbb{C}[x]_{\leq 3}$ e completarli ad una base.

Esercizio 3. Con la notazione dell'esercizio 2, sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ formato dai polinomi che si annullano nel punto 1. Mostrare che V è uno spazio vettoriale; qual è la sua dimensione?

Esercizio 4. Consideriamo $\mathbb{C}^2$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $(1, 3i+1)$ e $(i, -3+i)$ sono linearmente indipendenti. Completarli ad una base di $\mathbb{C}^2$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 5. Sia $V \subset \mathbb{C}^4$ il sottospazio generato dai vettori $(1,0,0,1)$ e $(-1,0,1,2)$. Sia $W \subset \mathbb{C}^4$ il sottospazio formato dai vettori $w = (a,b,c,d)$ che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} 3c - d &= 0 \\ a + 2b &= 0. \end{cases}$$

Determinare i sottospazi $V \cap W$ e $V + W$ dandone una base *oppure* tramite equazioni. In particolare dire qual è la loro dimensione.

Esercizio 6. Ridurre a scala le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Calcolare la dimensione di $\mathbb{Q}[1+\sqrt{2}]$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 8. Sia $\omega = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$. Determinare, tramite i passi seguenti, la dimensione di $\mathbb{Q}[\omega]$ come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$.

(1) Calcolare quanto vale ω^3.

(2) Trovare un polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $p(\omega) = 0$.

(3) Fattorizzando $p(x)$ trovare un polinomio $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ di grado 2 tale che $q(\omega) = 0$.

(4) Mostrare che $q(x)$ è irriducibile e concludere.