Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 4

13 ottobre 2008

Gruppo 1

Esercizio 1. Consideriamo i seguenti insiemi di vettori in $\mathbb{R}^n$; utilizzare il metodo di Gauss per estrarre una base del sottospazio da essi generato. In particolare calcolarne la dimensione.

$$\{(1,1,0,1),\ (-1,0,0,1),\ (0,1,0,2)\}$$
$$\{(1,1,0,2),\ (1,0,1,0),\ (0,1,3,1),\ (2,0,-2,1)\}$$
$$\{(1,2,3,4,5),\ (0,0,1,0,1),\ (1,2,0,4,2),\ (-1,1,-2,1,0),\ (0,3,-2,5,2)\}.$$

Esercizio 2. Utilizzare il metodo di Gauss per risolovere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2c-d & =1 \\ a+b+c & =2 \\ a-2d+e & =-1 \\ c+d+3e & =0 \\ a+b+c+d+e & =1. \end{cases}$$

Gruppo 2

Esercizio 3. Sia $V \subset \mathbb{C}^4$ il sottospazio generato dai vettori $(3,1,1,-1)$ e $(0,0,1,1)$. Sia $W \subset \mathbb{C}^4$ il sottospazio formato dai vettori $w=(a,b,c,d)$ che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} a-b+d & =0 \\ 2b+c+d & =0. \end{cases}$$

Determinare i sottospazi $V \cap W$ e $V+W$ dandone una base *oppure* tramite equazioni. In particolare dire qual è la loro dimensione.

Esercizio 4. Siano dati i vettori

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,0,1,2) \\ v_2 &= (1+i,i,-1,2-2i) \\ w_1 &= (-i,1+i,-1,0) \\ w_2 &= (i,-i,-1,3i) \end{aligned}$$

in $\mathbb{C}^4$. Siano $V=\langle v_1,v_2\rangle$ e $W=\langle w_1,w_2\rangle$. Determinare chi è $V\cap W$. Dedurne che v_1, v_2, w_1 e w_2 generano tutto $\mathbb{C}^4$.

Gruppo 3

Esercizio 5. Siano $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ numeri distinti. Dimostrare, tramite i passi seguenti, che i vettori

$$\begin{aligned} v_0 &= (1, a_0, a_0^2, \dots, a_0^n) \\ v_1 &= (1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^n) \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ v_n &= (1, a_n, a_n^2, \dots, a_n^n) \end{aligned}$$

sono una base di $\mathbb{R}^{n+1}$.

(1) Dimostrare che è sufficiente far vedere che sono linearmente indipendenti.

(2) Mostrate la tesi per $n = 1, 2$, usando l'eliminazione di Gauss.

(3) Provate a generalizzare il procedimento per n qualsiasi.

Esercizio 6. Usate il risultato dell'esercizio precedente (se non l'avete risolto potete assumerlo per buono) per dimostrare l'affermazione seguente. Dati numeri distinti $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, i polinomi $(x - a_0)^d, (x - a_1)^d, \dots, (x - a_n)^d$ sono una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$.

In particolare $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ è generato delle potenze $(x - a)^d$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.