Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 5

17 ottobre 2008

Esercizio 1. (1) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calcolare i prodotti AB e BA e dedurne che il prodotto tra matrici non è necessariamente commutativo.

(2) Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il prodotto AB e dedurne che per matrici non vale la legge di annullamento del prodotto.

(3) Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolare A^3 e dedurne che non vale la proprietà che le potenze di un elemento non nullo sono non nulle (questo è più forte dell'enunciato precedente).

Esercizio 2. Consideriamo le matrici

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare che $J^2 = -\mathrm{I}$. Consideriamo il sottospazio C di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ generato da I e da J, cioè

$$C = \{a\,\mathrm{I} + bJ \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Verificare che C è un campo. Sapete riconoscere di che campo si tratta?

Esercizio 3. Cerchiamo di costruire un analogo dell'esercizio precedente, usando stavolta coefficienti complessi. Consideriamo il sottospazio *reale* Q di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ definito da

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix} \mid w, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Quando w e z sono reali otteniamo esattamente le matrici dell'esercizio precedente. Verificare che Q soddisfa tutte le proprietà di un campo, tranne il fatto che la moltiplicazione non è commutativa.

(Suggerimento: la parte difficile è costruire l'inverso di una matrice $A \in Q$. Data

$$A = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

definiamo

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \\ -w & z \end{pmatrix}.$$

Quanto vale il prodotto $A \cdot A^*$?)

Esercizio 4. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare l'inversa di A, cioè una matrice $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $AB = BA = \mathrm{I}$.

(Suggerimento: se scrivete esplicitamente la condizione $AB = \mathrm{I}$ trovate un sistema lineare nei coefficienti di B).

Esercizio 5. Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.

(1) La funzione

$$f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}$$

data da $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$.

(2) La funzione

$$f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}$$

data da $f(x, y, z) = 3x - 2y + 1$.

(3) Sia X l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. La funzione

$$f\colon X \mapsto \mathbb{R}$$

data da $f(\phi) = \phi(1)$.

(4) Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. La funzione

$$f\colon \mathcal{M}_{m\times n} \mapsto \mathcal{M}_{m\times p}$$

data da $f(B) = B \cdot A$.

(5) La funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

data da $f(x, y) = (e^y, e^x)$.

Esercizio 6. Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ una matrice a coefficienti in $\mathbb{K}$. Definiamo la trasposta di A, indicata con ${}^{\mathrm{t}}A$ tramite

$${}^{\mathrm{t}}A_{ij} = A_{ji}.$$

In altre parole ${}^{\mathrm{t}}A$ si ottiene da A riflettendo rispetto alla diagonale principale.

Dimostrare che se A è a coefficienti reali e ${}^{\mathrm{t}}A \cdot A = \underline{0}$, allora $A = \underline{0}$ (fate prima il caso 2×2).

Esercizio 7. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ un numero algebrico, cioè tale che esista un polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ per cui $p(\alpha) = 0$. Dimostrare, tramite i passi seguenti, che $\mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo.

(1) È sufficiente vedere che se $\theta \in \mathbb{Q}[\alpha]$, $\theta \neq 0$, allora $1/\theta \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

(2) Dimostrate che $\mathbb{Q}[\alpha]$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{Q}$.

(3) Dimostrate che se $\theta \in \mathbb{Q}[\alpha]$ esiste un polinomio $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $q(\theta) = 0$ (considerate le potenze $\theta, \theta^2, \theta^3, \ldots$).

(4) Concludete dal passo precedente.

Esercizio 8. Siano V e W due spazi vettoriali. Un'applicazione lineare $f\colon V \mapsto W$ si dice un isomorfismo se esiste un'altra applicazione lineare $g\colon W \mapsto V$ che sia l'inversa di f.

Siano ora V e W i sottospazi di $\mathbb{R}[x]_{\leq d}$ formati dai polinomi che si annullano nel punto 1 e 3 rispettivamente. Trovare un isomorfismo da V a W.