Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 6

20 ottobre 2008

Gruppo 1

Esercizio 1. (1) Sia $f\colon \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(t, x, y, z) = (2x - 3y, t + x + y + z).$$

Calcolare le dimensioni di $\ker f$ e $\operatorname{im} f$.

(2) Sia $g\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ l'applicazione data $g(z) = z + \bar{z}$. Dimostrare che g non è lineare se vediamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, ma lo è se vediamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. In questo secondo caso determinare $\ker g$ e $\operatorname{im} g$.

Esercizio 2. Sia

$$f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mapsto \mathbb{R}[x]_{\leq d+1}$$

l'applicazione data da $f(p(x)) = xp(x)$, e sia

$$g\colon \mathbb{R}[x]_{\leq d+1} \mapsto \mathbb{R}$$

l'applicazione data da $g(q(x)) = q(0)$. Dimostrare che f e g sono lineari e che $\ker g = \operatorname{im} f$.

Bonus per chi ha visto un po' di analisi. Sia ora

$$f_1\colon \mathbb{R}[x]_{\leq d} \mapsto \mathbb{R}[x]_{\leq d+2}$$

l'applicazione data da $f_1(p(x)) = (x+1)^2 p(x)$. Trovare $g_1\colon \mathbb{R}[x]_{\leq d+2} \mapsto \mathbb{R}^2$ in modo che $\ker g_1 = \operatorname{im} f_1$.

Gruppo 2

Esercizio 3. Dire quali delle seguenti applicazioni sono lineari, e in caso, se sono isomorfismi.

(1) L'applicazione $f\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ data da $f(M) = M + {}^{\mathrm{t}}M$.

(2) L'applicazione $f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$ data da

$$f(x, y, z) = (x + y + z, x - z, y + z).$$

(3) Vediamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. L'applicazione $f\colon \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^2$ data da

$$f(z) = (\Re e\, z, \Im m\, z).$$

(4) Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Sia $g(x) = x^3$.

L'applicazione $f \colon X \mapsto X$ data da $f(\phi) = \phi \circ g$.

(5) L'applicazione $f \colon X \mapsto X$ data da $f(\phi) = g \circ \phi$.

Esercizio 4. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Sia $V \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ il sottoinsieme formato dalle matrici che commutano con A, ovvero
$$V = \{B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}.$$
Dimostrare che V è un sottospazio, e determinarlo esplicitamente, in particolare calcolarne la dimensione.

Sia
$$W = \{AB - BA \mid B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})\}.$$
Dimostrare che W è un sottospazio di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ed esibirne una base.

Gruppo 3

Esercizio 5. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ tre numeri complessi con
$$\alpha^3 = 1, \qquad \beta^3 = 2, \qquad \gamma^3 = 3, \qquad \alpha \neq 1.$$
Dimostrare che esiste un isomorfismo di spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$ tra $\mathbb{Q}[\beta]$ e $\mathbb{Q}[\gamma]$, ma non tra $\mathbb{Q}[\alpha]$ e $\mathbb{Q}[\beta]$.

(Suggerimento: vi conviene dimostrare che β e γ non sono radici di polinomi di secondo grado a coefficienti in $\mathbb{Q}$. Questo non è facilissimo con la teoria che avete visto per ora, ma può essere fatto con la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado).

Esercizio 6. La nozione di isomorfismo può essere data anche per i campi. Due campi $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}_2$ si dicono isomorfi se esiste una funzione $\phi \colon \mathbb{K}_1 \mapsto \mathbb{K}_2$ che sia biunivoca e tale che
$$\begin{gathered} \phi(0) = 0, \qquad \phi(1) = 1 \\ \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{K}_1 \\ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{K}_1. \end{gathered}$$
In altre parole ϕ deve essere una corrispondenza biunivoca che conserva tutte le operazioni.

Dimostrare che i campi $\mathbb{Q}[\beta]$ e $\mathbb{Q}[\gamma]$ dell'esercizio 5, che *sono isomorfi come spazi vettoriali*, non sono isomorfi come campi.