

Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 7

24 ottobre 2008

Esercizio 1.

Sia $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f(x, y) = (3x - 2y, x + 3y).$$

Calcolare la matrice di f nella base $\{(2, 1), (1, 3)\}$.

Esercizio 2. Siano dati i vettori di \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned}v_1 &= (1, 2, 3) \\v_2 &= (1, 2, 0) \\v_3 &= (2, 1, 1) \\v &= (-1, 2, -1).\end{aligned}$$

Calcolare le coordinate dei vettori della base standard e di v rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Esercizio 3. Siano v_1, v_2 e v_3 come nell'esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione la cui matrice nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la matrice di f nella base standard.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq 2}$ e sia $f: V \mapsto V$ l'applicazione lineare data da

$$f(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x} + p(x).$$

Verificare che f è lineare e calcolare la matrice di f nella base $\{2, 2 + x, x - x^2\}$.

Esercizio 5. Vediamo \mathbb{C} come spazio vettoriale su \mathbb{R} . Dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$ sia $L_z: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per z . Mostrare che la matrice di L_z nella base $\{1, i\}$ è

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. Siano v_1, v_2 e v_3 come nell'esercizio 2. Sia $f: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data, nella base $\{v_1, v_2, v_3\}$, dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la dimensione di $\ker f$ e trovare una base del nucleo.

Esercizio 7. *Per chi ha visto un po' di derivate.*

- (1) Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e sia $D: V \mapsto V$ la derivata. Mostrare che D è un'applicazione lineare e calcolarne la matrice rispetto alla base $\{1, 1+x, 1+x^2, x^2+x^3\}$.
- (2) Sia W lo spazio vettoriale generato dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$. Mostrare che la derivata dà luogo ad un'applicazione lineare $D: W \mapsto W$ e calcolarne la matrice rispetto alla base $\{\sin x, \sin x + \cos x\}$.