

## Esercizi del corso di algebra lineare - Foglio 9

7 novembre 2008

**Esercizio 1.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \\ 9 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 2.** Sia  $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  e consideriamo l'applicazione lineare  $f: V \mapsto V$  data da

$$f(p(x)) = \frac{p(x) - p(0)}{x} + p(x).$$

Scelta una base di  $V$ , trovare la matrice di  $f$  rispetto a questa base e calcolarne il determinante. Verificare una scelta diversa della base dà lo stesso risultato.

**Esercizio 3.** Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Verificate che  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , ma  $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ .

**Esercizio 4.** Negli esercizi precedenti abbiamo visto che il campo  $\mathbb{C}$  dei numeri complessi è isomorfo a un certo insieme  $C$  di matrici  $2 \times 2$  a coefficienti reali, dove a  $z = a + ib$  corrisponde la matrice

$$L_z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Verificare che  $\det(L_z) = |z|^2$  e dedurne che per matrici in  $C$  vale

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Sapreste dimostrare la stessa cosa per matrici  $2 \times 2$  qualsiasi?

**Esercizio 5.** Dati  $n + 1$  numeri  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  consideriamo la matrice di Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix}.$$

Dimostrare per induzione che il determinante di  $V$  è pari al prodotto di tutte le differenze tra gli  $\alpha_i$ , ovvero

$$\det(V) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

In particolare il determinante si annulla se e solo se due degli  $\alpha_i$  coincidono.

(Sugg: iniziate sottraendo ad ogni riga la precedente moltiplicata per  $\alpha_0$ .)

*I prossimi esercizi sono per gli studenti di O'Grady (o comunque per chi ha visto qualcosa sulle permutazioni).*

**Esercizio 6.** Calcolare i seguenti prodotti tra permutazioni:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Esercizio 7.** Calcolare la parità delle permutazioni seguenti:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$