

# Algebra Lineare

## II Prova in itinere - Compito A

26 Gennaio 2009

GIUSTIFICATE LE RISPOSTE !

**Esercizio 1.** Sia  $r \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  la retta di equazioni parametriche

$$x = t + 1, \quad y = 2t, \quad z = 1.$$

e  $s \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1, \\x - 2z &= 0.\end{aligned}$$

Trovate l'equazione cartesiana del piano contenente  $r$  e parallelo a  $s$ .

**Esercizio 2.** Siano  $P_i, Q_i \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  per  $i = 1, 2, 3$  i punti

$$\begin{aligned}P_1 &:= (1, 2), & P_2 &:= (2, 1), & P_3 &:= (0, -1) \\Q_1 &:= (4, -4), & Q_2 &:= (1, 0), & Q_3 &:= (0, 0).\end{aligned}$$

Sia  $f: \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2 \mapsto \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  l'affinità tale che

$$f(P_i) = Q_i, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Determinate  $f(P)$  dove  $P := (1, 0)$ .

**Esercizio 3.** Sia  $\mathbb{E}^4$  lo spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 4 cioè  $\mathbb{R}^4$  dotato del prodotto scalare standard. Sia  $v := (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{E}^4$ . Dare una base ortonormale di  $v^\perp$ .

**Esercizio 4.** Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolate  $A^k$  per  $k$  arbitrario.

**Esercizio 5.** Sia  $V$  il sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale  $C^\infty(\mathbb{R})$  (lo spazio delle funzioni reali di variabile reale infinitamente differenziabili) generato dalle funzioni  $\cos^2 \theta$ ,  $\sin^2 \theta$ ,  $\sin \theta \cos \theta$ . Equivalentemente

$$V = \langle \cos^2 \theta, \sin^2 \theta, \sin \theta \cos \theta \rangle.$$

(a) Dimostrate che se  $f \in V$  allora  $\frac{\partial f}{\partial \theta} \in V$  e quindi la derivazione definisce un'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{D} & V \\ f & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial \theta} \end{array}$$

(b) L'applicazione lineare  $D$  è o non è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$ ?

## Soluzioni

**Soluzione 1.** Sia  $\pi$  il piano cercato. Sia  $P$  un punto di  $r$  per esempio il punto  $P = (1, 0, 1)$  ottenuto ponendo  $t = 0$  nelle equazioni parametriche di  $r$ . Siano  $\mathcal{G}(r)$  e  $\mathcal{G}(s)$  le giaciture di  $r$  e  $s$  rispettivamente. Allora  $\pi$  è il piano contenente  $P$  di giacitura

$$\mathcal{G}(\pi) = \langle \mathcal{G}(r), \mathcal{G}(s) \rangle.$$

La giacitura di  $r$  è generata dal vettore con entrate i coefficienti direttori di  $r$  cioè

$$\mathcal{G}(r) = \langle (1, 2, 0) \rangle.$$

La giacitura di  $s$  è il sottospazio di  $\mathbb{R}^3$  delle soluzioni del sistema di equazioni omogenee associato al sistema che definisce  $s$ . Risolvendo otteniamo

$$\mathcal{G}(s) = \langle (2, -3, 1) \rangle.$$

Segue che  $\pi$  è il piano di equazione cartesiana

$$2x - y - 7z + 5 = 0.$$

**Soluzione 2.** Si ha che

$$P = \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3.$$

(Notate che la somma dei coefficienti è uguale a 1!) Siccome  $f$  è affine

$$f(P) = f\left(\frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{2}P_3\right) = \frac{1}{2}f(P_2) + \frac{1}{2}f(P_3) = \frac{1}{2}f(1, 0) + \frac{1}{2}f(0, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

**Soluzione 3.** Una delle tante possibili soluzioni: i vettori non nulli

$$v_1 := (1, -1, 0, 0), \quad v_2 := (0, 0, 1, -1), \quad v_3 := (1, 1, -1, -1)$$

appartengono a  $v^\perp$  e sono a due a due ortogonali. Segue che  $v_1, v_2, v_3$  sono linearmente indipendenti e quindi  $\{v_1, v_2, v_3\}$  è una base ortogonale di  $v^\perp$  giacché  $\dim v^\perp = 3$ . Normalizzando otteniamo una (tra le tante) base ortonormale di  $v^\perp$ :

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

**Soluzione 4.** Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Risolvendo troviamo che gli autovalori di  $A$  sono 1 e 3 con autovettori associati  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$  rispettivamente. Quindi  $A$  è diagonalizzabile e abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{pmatrix}$$

**Soluzione 5.** Abbiamo

$$\begin{aligned}1 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta, \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Segue che  $V = \langle 1, \cos 2\theta, \sin 2\theta \rangle$  e che  $\mathcal{B} := \{1, \cos 2\theta, \sin 2\theta\}$  è una base di  $V$ . Si ha

$$D(1) = 0, \quad D(\cos 2\theta) = -2 \sin 2\theta, \quad D(\sin 2\theta) = 2 \cos 2\theta$$

Quindi  $D$  manda  $V$  in sé stesso e la matrice associata a  $D$  nella base  $\mathcal{B}$  è

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue che il polinomio caratteristico di  $D$  è

$$p_D(\lambda) = \lambda(\lambda^2 + 4).$$

Siccome  $p_D$  non ha tutte radici reali l'applicazione  $D$  non è diagonalizzabile: più precisamente esiste un solo autospazio di  $D$  (associato all'autovalore 0) e ha dimensione 1.