UNA RACCOLTA DI ESERCIZI

ANDREA FERRETTI

1. Introduzione

Voglio raccogliere qui alcuni esercizi che ho incontrato negli anni e che ho trovato particolarmente carini o istruttivi. Ringrazio Maurizio, Enrico, Valentino e Giulio per avermi fornito per email buona parte di questi problemi. Col tempo vorrei scrivere anche le loro soluzioni, ma questa non è una priorità.

La raccolta, per quanto piccola, è estremamente variegata. Gli esercizi potrebbero essere formulabili e risolvibili in maniera del tutto elementare o richiedere un po' di teoria da diverse parti della matematica. L'unica cosa che li accomuna è che, *se presentati al momento giusto*, possono essere molto piacevoli e stimolanti da risolvere. È importante notare che ci sono, ad esempio, esercizi di Analisi 1 che si possono risolvere solo con strumenti più avanzati; non dovrebbero dunque essere presentati troppo presto. Viceversa alcuni esercizi potrebbero diventare banali per chi conosca abbastanza teoria.

In conclusione li presento qua (rigorosamente in ordine sparso) più che altro per non dimenticarli; questa raccolta verrà aggiornata ogni volta che mi ricorderò altri esercizi carini, o che ne scoprirò di nuovi. Un'ultima osservazione: se affrontati al momento giusto, questi sono tutti esercizi *difficili*: non scoraggiatevi se non riuscite a farli. $\ddot\smile$ In bocca al lupo per la risoluzione!

2. Esercizi

Esercizio 1. Sia X uno spazio di Banach. Allora ogni base di X è finita o più che numerabile.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra. Allora $\mathcal{A}$ è finita o più che numerabile.

Esercizio 3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme misurabile con $\mathcal{L}(A) > 0$ (qui $\mathcal{L}$ indica la misura di Lebesgue). Allora

$$A - A := \{x - y \mid x, y \in A\}$$

contiene un intorno dello 0.

Esercizio 4. Esiste una funzione $f\colon [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continua che non ammette derivata in alcun punto di $[0,1]$.

Esercizio 5. Esiste una funzione $f\colon [0,1] \mapsto [0,1]^2$ continua e suriettiva.

Esercizio 6. Sia $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^\infty$ e supponiamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esista n (dipendente da x) tale che $f^{(n)}(x) = 0$, dove $f^{(n)}$ indica la derivata n-esima. Allora f è una funzione polinomiale.

Esercizio 7. Esiste una funzione $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua esattamente nei punti di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tuttavia non esiste alcuna funzione $g\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua esattamente nei punti di $\mathbb{Q}$.

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che f' è continua in x.

Date: 27 gennaio 2009.

Esercizio 9. Sia $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora la derivata f' gode della proprietà del valore intermedio: se $f(a) < k < f(b)$, esiste un punto c compreso tra a e b tale che $f(c) = k$.

Esercizio 10. L'insieme $\mathcal{L}^2([0,1])$ è di prima categoria dentro $\mathcal{L}^1([0,1])$.

Esercizio 11. Sia $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio a coefficienti complessi. Allora l'insieme

$$\{z \mid p'(z) = 0\}$$

è contenuto nell'inviluppo convesso dell'insieme

$$\{z \mid p'(z) = 0\}.$$

Esercizio 12. Su una spiaggia è presente un ombrellone in ciascun punto a coordinate intere. Dimostrare che mettendosi nel punto $(0,0)$, esistono quadrati arbitrariamente grandi di ombrelloni coperti alla vista.

Esercizio 13. Sia $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua e supponiamo che per ogni $\alpha > 0$ si abbia

$$\lim_{n \to +\infty} f(n\alpha) = 0.$$

Allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Esercizio 14. Sia $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_k$ un polinomio omogeneo di grado $k \geq 2$. Dimostrare che esiste un unico polinomio $q \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]_{k-2}$ tale che

$$p(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 q(\mathbf{x}) + r(\mathbf{x})$$

con r polinomio armonico (cioè $\Delta r \equiv 0$). Qui abbiamo indicato $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \dots x_n^2.$$

Esercizio 15. Diciamo che un rettangolo R è *bello* se ha almeno un lato di lunghezza intera. Sia S un rettangolo che si scrive come unione finita di rettangoli belli che si incontrano lungo i lati. È vero che S è necessariamente bello?

Esercizio 16. Supponiamo di voler coprire interamente di scotch un cerchio di diametro $n \in \mathbb{N}$, utilizzando fettuccine di scotch lunghe a piacere, ma di larghezza 1. Qual è il minimo numero di fettuccine necessario?

Esercizio 17. Sia G un gruppo tale che più di $3/4$ degli elementi di G soddisfano $x^2 = x$. Allora G è abeliano. Trovare un controesempio se si richiede che esattamente $3/4$ degli elementi soddisfino l'uguaglianza.

Esercizio 18. Sia $X \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ una famiglia di sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$. Supponiamo che ogni $A \in X$ abbia cardinalità dispari, ma che dati $A, B \in X$ distinti, la cardinalità $|A \cap B|$ sia pari. Allora

$$|X| \leq n.$$

Esercizio 19. Dimostrare che l'equazione

$$2u^2 = v^4 - 17w^4$$

non ha soluzioni intere diverse da $u = v = w = 0$; tuttavia ha soluzioni non banali modulo n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 20. Sia X uno spazio metrico compatto, $f\colon X \mapsto X$ un'isometria (cioè

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

per ogni $x, y \in X$). Allora f è biunivoca.

Esercizio 21. Data una varietà differenziabile M indichiamo con $M^{(2)}$ il prodotto simmetrico di M, ovvero

$$M^{(2)} = M^2/\sim$$

dove la relazione d'equivalenza è $(x, y) \sim (y, x)$ per ogni $x, y \in M$. Dimostrare che $M^{(2)}$ è ancora una varietà se M è una superficie. Chi è $(S^2)^{(2)}$?

Esercizio 22. Sia $\mathcal{P} = \{4, 8, 9, \dots\}$ l'insieme delle potenze perfette (maggiori di 1). Allora

$$\sum_{n \in \mathcal{P}} \frac{1}{n-1} = 1.$$

Esercizio 23. Definiamo le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ come le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} s'' &= -s \\ s(0) &= 0 \\ s'(0) &= 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} c'' &= -c \\ c(0) &= 1 \\ c'(0) &= 0 \end{cases}$$

rispettivamente. Ricavare dalle equazioni le usuali proprietà delle funzioni trigonometriche; in particolare dimostrare che sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e periodiche e valgono le usuali formule di addizione. (Il punto dell'esercizio è che *senza assumere* di aver studiato precedentemente le funzioni seno e coseno, si può assumere questa come definizione e ricavare tutte le usuali proprietà).

Esercizio 24. Sia F_n la successione dei numeri di Fibonacci, definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ per } n \geq 0. \end{cases}$$

Dimostrare che

$$(F_a, F_b) = F_{(a,b)},$$

dove (a, b) indica il massimo comun divisore tra a e b.

Esercizio 25. Sia $\mathcal{A} = \{f_\alpha\}$ una famiglia di funzioni olomorfe intere (distinte). Supponiamo che per ogni $z \in \mathbb{C}$ l'insieme dei valori

$$\{f_\alpha(z)\}$$

sia numerabile. È vero che $\mathcal{A}$ è numerabile?

Esercizio 26. Sia X uno spazo topologico compatto di Hausdorff (non cambia niente se preferite considerare $X = [0, 1]$). Consideriamo l'anello $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ delle funzioni continue su X a valori reali. Per ogni punto $x \in X$ sia

$$\mathcal{I}_x := \{f \in \mathcal{A} \mid f(x) = 0\}.$$

Dimostrare che gli insiemi $\mathcal{I}_x$ sono ideali massimali, e che ogni ideale massimale si ottiene in questo modo.

Esercizio 27. Dati n numeri reali positivi $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ definiamo la loro media p-esima come

$$\mathcal{M}_p(\mathbf{a}) = \sqrt[p]{\frac{a_1^p + \cdots + a_n^p}{n}}$$

per $p \neq 0$ e come la media geometrica per $p = 0$:

$$\mathcal{M}_0(\mathbf{a}) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$

Dimostrare che $\mathcal{M}_p(\mathbf{a})$ è una funzione crescente di $p \in \mathbb{R}$.

Esercizio 28. Siano dati $n = ab + 1$ numeri reali. Dimostrare che esiste una sottosequenza di $a + 1$ numeri crescente *oppure* una di $b + 1$ decrscente.

Esercizio 29. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ monotona.

Esercizio 30. Dimostrare i seguenti *teoremi di Cesaro*:

i) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, e supponiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = L.$$

ii) Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali, e supponiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

iii) Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri reali, e supponiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$
Allora
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Esercizio 31. Sia F_n il gruppo libero su n generatori. Dimostrare che F_2 contiene sottogruppi isomorfi a F_n per ogni n.

Esercizio 32. Sia X uno spazio metrico compatto e sia $C(X)$ l'insieme dei chiusi non vuoti di X. Dati due chiusi $F, G \in C(X)$ definiamo
$$D(F,G) := \max \left\{ \sup_{x\in F} d(x,G),\ \sup_{x\in G} d(x,F) \right\}$$
dove per definizione
$$d(x,F) := \inf_{y\in F} d(x,y).$$
Dimostrare che D è una distanza su $C(X)$ che rende $C(X)$ uno spazio metrico *compatto*.

Esercizio 33. Sia X uno spazio metrico compatto e supponiamo che per ogni palla aperta $B(x,r) \subset X$ valga
$$\overline{B(x,r)} = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}.$$
Allora ogni palla di X è connessa.

Esercizio 34. Esiste una funzione intera $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che non sia un polinomio ma che abbia la proprietà che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrico $f(\alpha)$ è ancora algebrico?

Esercizio 35. Sia D il disco unitario di $\mathbb{C}$, $f\colon D \to \mathbb{C}$ olomorfa. Supponiamo che si abbia la fattorizzazione $f = g \cdot u$, dove
$$g\colon D \to \mathbb{C}, \qquad u\colon D \to \mathbb{R}$$
sono due funzioni C^∞, con u non identicamente nulla. Mostrare che se g non si annulla mai, anche f non si annulla mai.

Esercizio 36. Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme misurabile del piano con $\mathcal{L}(E) > n$ (qui $\mathcal{L}$ indica la misura di Lebesgue). Allora è possibile traslare E in modo che copra almeno $n + 1$ punti a coordinate intere.

Esercizio 37. Sia T un triangolo di vertici b, r, v e supponiamo di avere una sua triangolazione. Coloriamo ogni vertice della triangolazione di blu, rosso o verde, secondo le seguenti regole:

- il vertice b è colorato di blu;
- il vertice r è colorato di rosso;
- il vertice v è colorato di verde;
- ogni vertice sul lato br è colorato di blu o rosso;
- ogni vertice sul lato bv è colorato di blu o verde;
- ogni vertice sul lato vr è colorato di verde o rosso.

Non c'è alcuna condizione sulla colorazione dei vertici interni. Allora esiste un triangolino della triangolazione avente i vertici di tutti i tre colori.

Esercizio 38. Supponiamo di avere un grafo in cui la valenza media dei vertici è almeno d (la valenza di un vertice è il numero di lati adiacenti). Numeriamo i lati in un modo qualsiasi, da 1 a n (numero dei lati). Dimostrare che esiste un cammino crescente lungo i lati di lunghezza almeno d, indipendentemente dalla numerazione data.

Andrea Ferretti: SAPIENZA Università di Roma, Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo", Piazzale A. Moro 2, I-00185 Roma, Italy

E-mail address: `ferrettiandrea@gmail.com`