

**IL TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE PER SUPERFICI DI
RIEMANN**

ANDREA FERRETTI

Date: 18 gennaio 2007.

INDICE

1. Introduzione	2
2. Richiami di analisi complessa	3
3. Convergenza uniforme di funzioni olomorfe	5
4. Il teorema di Riemann nel piano	8
5. Altre caratterizzazioni del disco	9
6. Morfismi tra superfici di Riemann compatte	12
7. Uniformizzazione: il caso in cui X è compatta	14
8. Uniformizzazione: il caso in cui X non è compatta	17
9. Classificazione degli automorfismi	20
10. Una forma effettiva di uniformizzazione	22
11. Il teorema di uniformizzazione in geometria conforme	26
Riferimenti bibliografici	30

1. INTRODUZIONE

Scopo di questa nota è dimostrare il classico teorema di uniformizzazione dovuto a Riemann e Weierstrass.

Definizione 1.1. Una varietà complessa di dimensione 1 è detta una superficie di Riemann.

Teorema 1.2. *Sia X una superficie di Riemann semplicemente connessa. Allora X è biomorfa a \mathbb{C} , oppure al disco unitario $D \subset \mathbb{C}$, oppure alla retta proiettiva \mathbb{CP}^1 .*

Osserviamo innanzitutto che i tre modelli di superfici di Riemann sono effettivamente semplicemente connessi: \mathbb{C} e D sono chiaramente contraibili, mentre \mathbb{CP}^1 è semplicemente connesso per il teorema di Van Kampen, applicato al ricoprimento di \mathbb{CP}^1 dato dagli aperti standard $U_1 = \{[z_1 : z_2] \mid z_1 \neq 0\}$ e $U_2 = \{[z_1 : z_2] \mid z_2 \neq 0\}$. Inoltre i tre esempi sono fra loro non biomorfi: in effetti \mathbb{CP}^1 è compatto, dunque non è neppure omeomorfo agli altri due. \mathbb{C} e D sono invece omeomorfi, ma non biomorfi: ogni funzione analitica $f: \mathbb{C} \rightarrow D$ è limitata, dunque costante per il teorema di Liouville.

Per dimostrare questo risultato ci avvarremo di vari strumenti in diversi rami della matematica, che non possiamo introdurre sistematicamente. In particolare assumeremo una conoscenza di base di analisi complessa in una variabile; i concetti fondamentali della geometria differenziale; infine il gruppo fondamentale e la teoria dei rivestimenti (ad esempio [Hat02, cap. 1]). Occasionalmente avremo bisogno di altri strumenti, il cui uso è però limitato a singole dimostrazioni, che possono essere omesse dal lettore che non ne disponga. Nella fattispecie useremo la coomologia di De Rham e le sue proprietà, in particolare la dualità di Poincaré per superfici eventualmente anche non compatte (vedi [Lee03, cap. 11]) e alcune proprietà dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie associate. Inoltre avremo bisogno di un risultato classico di analisi funzionale, il teorema di Ascoli-Arzelà, ma richiameremo l'enunciato al momento opportuno. L'ultima sezione è a parte: in essa si reinterpreta il teorema principale in geometria riemanniana, ed è destinata, ovviamente, ai lettori che conoscano questa materia.

L'approccio della dimostrazione è geometrico, in contrasto con l'approccio analitico tramite le funzioni armoniche proposto ad esempio in [FK92]. In diverse occasioni costruiremo opportune funzioni olomorfe come limiti di funzioni approssimanti: per questo motivo inizieremo richiamando alcuni fatti sui limiti di funzioni olomorfe. A questo punto potremo già dare una dimostrazione del teorema nel caso in cui la superficie di Riemann sia un aperto U di \mathbb{C} (Riemann mapping theorem). Successivamente vedremo come si ottenga, con tecniche molto diverse, tipiche della geometria algebrica, il teorema di uniformizzazione nel caso di superfici compatte. Rimarrà da trattare il problema per una superficie non compatta: facendo uso del teorema di uniformizzazione nel caso compatto ricondurremo il caso generale al Riemann mapping theorem.

Una volta dimostrato il teorema 1.2 tratteremo alcune generalizzazioni. In particolare affronteremo lo studio del seguente problema per superfici di Riemann compatte. Per il teorema di uniformizzazione sappiamo che il rivestimento universale di una superficie di Riemann X è \mathbb{C} , D oppure \mathbb{CP}^1 . Discuteremo allora come si possa ricostruire quale dei tre modelli sia effettivamente in termini della topologia di X . Nel fare ciò studieremo gli automorfismi delle superfici di Riemann semplicemente connesse, ed otterremo diverse caratterizzazioni delle curve ellittiche, superfici di Riemann omeomorfe ad un toro. Nell'ultimo paragrafo diamo una versione equivalente del teorema, nell'ambito delle geometria conforme delle superfici.

Ancora qualche avvertimento. Poiché utilizziamo sistematicamente risultati di compattezza, dovremo più volte estrarre da una successione di funzioni una sua sottosuccessione; come regola generale, eviteremo di dare nuovi indici alla sottosuccessione, evitando così acrobazie notazionali. Per quanto riguarda lo studio delle superfici di Riemann compatte, questo è un argomento classico di geometria algebrica. Noi ci limiteremo a pochi cenni sui risultati che entrano in gioco nella dimostrazione del teorema di uniformizzazione, e tendenzialmente le dimostrazioni saranno meno complete che nel resto della trattazione. In particolare abbiamo escluso una dimostrazione del teorema di Riemann-Roch: per questo e altri approfondimenti rimandiamo a [GH94, cap. 2] oppure a [Mir95].

2. RICHIAMI DI ANALISI COMPLESSA

Per comodità del lettore richiamiamo, senza entrare troppo nei dettagli, alcuni risultati di analisi in una variabile complessa. Supporremo nota la teoria di base delle funzioni olomorfe, come presentata, ad esempio, nelle prime parti di [Lan99] o [Car95].

Sia f una funzione olomorfa non costante su un intorno di 0, e supponiamo, a meno di effettuare una traslazione, che $f(0) = 0$. Sviluppiamo f in serie di potenze come

$$f(z) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j z^j,$$

dove $k \geq 1$ è il minimo indice per cui $a_k \neq 0$. Raccogliendo a_k possiamo scrivere $f(z) = a_k(1 + h(z))$ con h olomorfa intorno a 0 e nulla nell'origine. Poiché la funzione z^k è invertibile nell'intorno di 1 possiamo prendere una radice k -esima olomorfa di $1 + h(z)$ per z sufficientemente vicino a 0. Ne segue che

$$f(z) = a_k(g(z))^k = (bg(z))^k, \quad (2.1)$$

dove g è una funzione olomorfa, $g(0) = 0$ e $b^k = a_k$. Confrontando lo sviluppo di f con quello di g si trova $g'(0) \neq 0$, perciò g è un isomorfismo locale intorno a 0.

In particolare affinché f sia iniettiva è necessario che $k = 1$, visto che la funzione $z \mapsto z^k$ non è localmente iniettiva intorno a 0. Abbiamo così la

Proposizione 2.1. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa iniettiva. allora $f'(z) \neq 0$ per ogni $z \in U$.*

Inoltre dalla (2.1) segue che f è localmente composizione di g , che un isomorfismo locale, e di una potenza, che è comunque localmente aperta intorno a 0. Ne segue il

Lemma 2.2. *Sia U un aperto di \mathbb{C} . Una funzione olomorfa $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ è aperta nell'intorno dei punti in cui non è localmente costante.*

Corollario 2.3 (Principio del massimo). *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Se $|f|$ assume massimo su U , allora f è costante.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$ un punto di massimo; possiamo supporre che $f(z_0) \neq 0$. Poiché il valore assoluto è una funzione aperta lontano da 0, il lemma precedente ci dice che f è localmente costante nell'intorno di z_0 . Questo mostra che la controimmagine di $f(z_0)$ è un insieme aperto, e anche chiuso per la continuità di f . Essendo U connesso, segue che f è costante su U . \square

Corollario 2.4 (Lemma di Schwartz). *Sia $f: D \rightarrow D$ una funzione olomorfa con $f(0) = 0$. Allora $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \neq 0$ e $|f'(0)| \leq 1$. Se poi vale l'uguaglianza in un punto, allora $f(z) = az$ per qualche $a \in \mathbb{C}$ con $|a| = 1$.*

Dimostrazione. Poiché $f(0) = 0$ la funzione $g(z) = f(z)/z$ si prolunga ad una funzione continua, e dunque olomorfa ponendo $g(0) = f'(0)$. La tesi segue allora dal principio del massimo applicato alla funzione g . \square

Un altro strumento che utilizzeremo permette di contare il numero di zeri di una funzione olomorfa, con relativa molteplicità.

Teorema 2.5 (Principio dell'argomento). *Sia $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa, V un aperto con bordo regolare tale che $\bar{V} \subset U$. Supponiamo che $f|_{\partial V}$ non abbia zeri né poli. Allora la differenza tra il numero di zeri e il numero di poli di f in V (contati con molteplicità) è pari a*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \quad (2.2)$$

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$ uno zero di ordine k per f , e sia r un raggio abbastanza piccolo. Sulla palla $B(z_0, r)$ possiamo scrivere $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, dove g non si annulla sulla palla. Ne segue che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

L'integrale sul bordo del secondo addendo è nullo, perché g'/g è olomorfa sulla palla; l'integrale del primo addendo è invece $2k\pi i$, perciò il teorema è vero per $V = B(z_0, r)$. Lo stesso conto mostra che il teorema vale nel caso in cui z_0 sia un polo per f .

L'integrale in (2.2) è invariante per omotopia di cammini contenuti nell'insieme $\{z : f(z) \neq 0 \text{ e } f(z) \neq \infty\}$. Decomponiamo V in un'unione numerabile di quadrati

che si intersechino solo sul bordo, in modo che ogni quadrato contenga al più uno zero o un polo di f . Il teorema è vero per ciascuno dei quadrati, e sommando si ottiene la tesi per V . \square

3. CONVERGENZA UNIFORME DI FUNZIONI OLOMORFE

Come suggerisce il titolo siamo interessati a studiare quando esistono e come sono fatti i limiti uniformi di successioni di funzioni oloomorfe. I risultati che vedremo sono decisamente i migliori che uno potrebbe sperare, e costituiscono uno strumento utile per lo studio delle superfici di Riemann. Un primo passo in questa direzione è il classico criterio di Ascoli-Arzelà, che dà condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza uniforme di funzioni continue.

Dato uno spazio metrico X indichiamo con $C(X)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su X a valori in \mathbb{C} . Se X è compatto ogni funzione continua su X è limitata, ed ha dunque senso mettere su $C(X)$ la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Questa norma rende $C(X)$ uno spazio di Banach, ovvero la distanza $d(f, g) = \|f - g\|$ rende $C(X)$ uno spazio metrico completo. Se X non è compatto possiamo comunque dare una topologia a $C(X)$, dichiarando che un sistema fondamentale di intorni di $f \in C(X)$ è dato dagli insiemi

$$\{g \in C(X) \mid \|f - g\|_K < \varepsilon\},$$

al variare di $\varepsilon > 0$ e del compatto $K \subset X$, dove si è indicata $\|h\|_K$ la norma di $h|_K \in C(K)$.

Osserviamo che in questa topologia una successione f_i converge a f se e solo se per ogni compatto $K \subset X$ le funzioni $f_i|_K$ convergono a $f|_K$. Indicheremo la convergenza uniforme sui compatti semplicemente con la notazione $f_i \rightarrow f$.

Definizione 3.1. Sia $\{f_i\}$ una famiglia di funzioni continue su X . Diremo che le funzioni f_i sono equilimitate se esiste $k \in \mathbb{R}^+$ tale che $\|f_i\| \leq k$ per ogni i . Diremo che le f_i sono equicontinue se, dato $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $d(x, y) < \delta$, allora $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ per ogni i .

Con queste notazioni abbiamo il seguente criterio:

Teorema 3.2 (Ascoli-Arzelà). *Sia X uno spazio metrico, $\{f_i\}$ una famiglia di funzioni continue su X . Allora l'insieme f_i è relativamente compatto in $C(X)$ se e solo se le funzioni f_i sono equilimitate ed equicontinue.*

Supponiamo che ora X sia un dominio $U \subset \mathbb{C}$, e che le funzioni f_i siano oloomorfe. Se sono equilimitate ed equicontinue, abbiamo visto che, a meno di sottosuccessioni, convergono uniformemente sui compatti ad una funzione continua f . Ma c'è di più:

Proposizione 3.3. *Sia U un aperto di \mathbb{C} e supponiamo di avere funzioni oloomorfe $f_i: U \rightarrow \mathbb{C}$ convergenti uniformemente sui compatti alla funzione continua f . Allora f è ancora oloomorfa.*

In altri termini il sottospazio $\mathcal{O}(U) = \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ oloomorfe}\}$ è chiuso in $C(U)$.

Dimostrazione. Sia $z \in U$. Per il teorema di Cauchy possiamo scrivere

$$f_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_i(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (3.1)$$

dove γ è una circonferenza centrata in z e tutta contenuta in U . Poiché le f_i convergono uniformemente a f sul disco chiuso con bordo γ , possiamo passare al limite sotto segno di integrale nella (3.1) e ottenere

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

Derivando sotto segno di integrale troviamo che esiste

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad (3.2)$$

cioè f è olomorfa in z . □

Inoltre

Proposizione 3.4. *Sia U un aperto di \mathbb{C} e $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(U)$ una successione di funzioni olomorfe, $f_i \rightarrow f$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ le derivate $f_i^{(n)} \rightarrow f^{(n)}$.*

Dimostrazione. Per induzione sull'ordine di derivazione ci basta dimostrare la tesi per $n = 1$. Di più, possiamo limitarci a dimostrare la tesi localmente, perché se la convergenza uniforme è valida localmente, allora è valida anche sui compatti.

Sia allora $w \in U$ e $\gamma \subset U$ una circonferenza centrata in w di raggio δ . Se $|w - z| < \delta$, possiamo calcolare $f'(z)$ tramite la (3.2); una formula analoga vale per $f'_i(z)$. Ne segue la stima

$$|f'_i(z) - f'(z)| \leq \frac{\|f_i - f\|_{\gamma}}{\delta},$$

che garantisce la convergenza uniforme delle derivate sul disco bordato da γ . □

In vista di questi fatti è interessante capire quando delle funzioni olomorfe sono equilimitate ed equicontinue. In realtà siamo molto fortunati:

Proposizione 3.5. *Sia U un dominio di \mathbb{C} e $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(U)$. Se le funzioni f_i sono equilimitate, allora sono equicontinue sui compatti.*

Dimostrazione. Sia $K \subset U$ un compatto, e notiamo innanzitutto che K ha distanza positiva 3δ dal complementare di U . Prendiamo due punti $w, z \in K$ con $|w - z| < \delta$ e consideriamo una circonferenza γ centrata in z , di raggio 2δ . In questo modo γ è interamente contenuta in U e possiamo applicare la formula di Cauchy a w e a z :

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \right) = \frac{z - w}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - w)} d\zeta.$$

Da questa si ottiene la stima

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{|z - w| \|f\|}{\delta}.$$

□

La fortuna non finisce qui. In alcuni casi che considereremo le funzioni f_i saranno per costruzione iniettive. Sorprendentemente, nel caso olomorfo, questa proprietà passa al limite, con una sola eccezione.

Proposizione 3.6. *Sia U un dominio di \mathbb{C} e $f_i \rightarrow f$ una successione di funzioni olomorfe su U iniettive. Allora f è iniettiva oppure costante.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(z_1) = f(z_2)$, e consideriamo le funzioni $g_i(z) = f_i(z) - f_i(z_1)$. Per costruzione $g_i \rightarrow g$, dove $g(z) = f(z) - f(z_1)$. La nostra ipotesi ci dice che $g(z_2) = 0$; se poi f non è costante, allora g non è identicamente nulla, perciò z_2 è uno zero isolato.

Prendiamo una circonferenza γ intorno a z_2 e tale che g non abbia altri zeri sul disco bordato da γ . Possiamo contare gli zeri usando la derivata logaritmica di g , ottenendo

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{g'(\zeta)} d\zeta = 1. \quad (3.3)$$

D'altronde le g_i sono iniettive, perciò otteniamo per lo stesso motivo

$$\int_{\gamma} \frac{g_i(\zeta)}{g'_i(\zeta)} d\zeta = 0. \quad (3.4)$$

Tuttavia l'integrando $g_i(\zeta)/g'_i(\zeta) \rightarrow g(\zeta)/g'(\zeta)$ uniformemente su γ , per la proposizione 3.4, perciò l'integrale in (3.4) tende a quello in (3.3), assurdo. \square

Ci interessa a questo punto capire quando una successione di funzioni olomorfe iniettive è equilimitata, in modo da poter applicare Ascoli-Arzelà. La risposta, localmente, è: sempre, a patto di fissare il comportamento in un punto.

Proposizione 3.7. *Sia $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(D)$ una famiglia di funzioni iniettive. Supponiamo che $f_i(0) = 0$ e $f'_i(0) = 1$ per ogni i . Allora le funzioni f_i sono equilimitate su ogni disco $D' \subsetneq D$ centrato in 0.*

Dimostrazione. Chiaramente ogni singola funzione f_i ha massimo su $\overline{D'}$, perciò è limitata su D' . Mostriamo allora che, sotto l'ipotesi che ciascuna f_i sia limitata su D , abbiamo l'equilimitatezza.

Supponiamo per assurdo che non sia così. A meno di estrarre una sottosuccessione possiamo supporre che $\|f_i\| \rightarrow +\infty$. Consideriamo le funzioni rinormalizzate $g_i(z) = f_i(z)/\|f_i\|$. Queste sono per costruzione limitate, dunque per i risultati precedenti possiamo estrarre una sottosuccessione (che continueremo a indicare g_i) che converge a una funzione olomorfa $g: D \rightarrow \mathbb{C}$.

Dalla 3.6 sappiamo che g è a sua volta iniettiva, oppure è costante. D'altronde

$$g'(0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{\|f_i\|} = 0,$$

il che esclude che g possa essere iniettiva. Ne segue g è costante, e poiché $g(0) = 0$, g è identicamente nulla. Ma questo è assurdo perché $\|g_i\| = 1$ per ogni i . \square

Concludiamo con un risultato che ci sarà utile nel seguito per passare dalla locale equilimitatezza di una successione di funzioni olomorfe all'equilimitatezza globale.

Lemma 3.8. *Sia $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(D)$ una famiglia di funzioni iniettive. Sia $z_j \rightarrow 0$ una successione di numeri complessi e supponiamo di sapere che la successione numerica $\{f_i(z_j) \mid i \in \mathbb{N}\}$ è limitata per ogni j . Allora la famiglia $\{f_i\}$ è equilimitata su ogni disco $D' \subsetneq D$ centrato in 0.*

Dimostrazione. Come nel caso precedente possiamo supporre che ciascuna funzione sia limitata; supponiamo per assurdo che $\|f_i\| \rightarrow +\infty$, e definiamo $g_i(z) = f_i(z)/\|f_i\|$. A meno di estrarre sottosuccessioni abbiamo convergenza uniforme sui compatti $g_i \rightarrow g$. Dalle ipotesi che abbiamo fatto segue che $g(z_j) = 0$ per ogni j , perciò $g(0) = 0$ per continuità. Ma allora g ha uno zero non isolato e dunque g è identicamente nulla, assurdo. \square

4. IL TEOREMA DI RIEMANN NEL PIANO

In questa sezione dimostriamo la forma debole del teorema di uniformizzazione.

Teorema 4.1 (Riemann). *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso. Allora $U = \mathbb{C}$, oppure U è biolomorfo al disco aperto D .*

La dimostrazione che daremo è presa da [Lan99]. Iniziamo con una prima riduzione.

Lemma 4.2. *Sia $U \subsetneq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso. Allora U è biolomorfo ad un aperto di \mathbb{C} limitato.*

Dimostrazione. Per ipotesi possiamo trovare un punto $z \notin U$; a meno di fare una traslazione supponiamo che $z = 0$. Essendo U semplicemente connesso è allora ben definita la funzione $\log: U \rightarrow \mathbb{C}$. Chiaramente il logaritmo è un biolomorfismo con l'immagine, ammettendo come inversa la mappa esponenziale.

Sia $z_0 \in U$; mostriamo che esiste un intorno del punto $\log(z_0) + 2\pi i$ che non interseca $\log(U)$. Se così non fosse troveremmo una successione z_i di punti di U tali che $\log(z_i) \rightarrow \log(z_0) + 2\pi i$. Esponenziando troviamo $z_i \rightarrow z_0$, e dunque per continuità $\log(z_i) \rightarrow \log(z_0)$, assurdo.

Sia infine $w = \log(z_0) + 2\pi i$. Allora la funzione $1/(z - w)$ manda biolomorficamente U in un aperto di \mathbb{C} limitato. \square

Sia dunque U un aperto limitato, semplicemente connesso di \mathbb{C} . A meno di agire con una trasformazione affine possiamo supporre che $U \subset D$ e che $0 \in U$. Consideriamo l'insieme

$$A = \{f: U \rightarrow D \text{ iniettive} \mid f(0) = 0\}.$$

Chiaramente $\text{id}_U \in A$, perciò A non è vuoto. Vogliamo mostrare che A contiene un biolomorfismo con il disco unitario. Osserviamo innanzitutto che se f è una funzione olomorfa iniettiva su U , allora f' non si annulla mai. Per il teorema di invertibilità locale f è allora un biolomorfismo di U con la sua immagine. Ci basta perciò costruire una funzione $f \in A$ tale che $f(U) = D$.

L'idea è che una funzione che dilati al massimo U avrà derivata nell'origine piuttosto grande. Sia dunque

$$\lambda = \sup_{f \in A} |f'(0)|.$$

Possiamo costruire una successione massimizzante di funzioni $f_i \in A$, ovvero tali che $f'_i(0) \rightarrow \lambda$. La successione f_i è equilimitata per costruzione; per i risultati della sezione 3 ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti a $f \in \mathcal{O}(U)$.

Cosa sappiamo di f ? Innanzitutto, passando al limite $f(0) = 0$ e $f'(0) = \lambda$. Poiché $\lambda \neq 0$, f non è costante, dunque è iniettiva per la proposizione 3.6. Inoltre per continuità $f(U) \subset \overline{D}$. Tuttavia le funzioni olomorfe sono aperte, dunque $f(U) \subset D$; in conclusione f è essa stessa un elemento di A . Il Riemann mapping theorem risulterà allora dal lemma seguente.

Lemma 4.3. $f(U) = D$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $z_0 \in D$ non appartenente all'immagine, e costruiamo una funzione $g \in A$ con $g'(0) > f'(0) = \lambda$. Per prima

cosa prendiamo un automorfismo del disco che mandi z_0 in 0, ad esempio

$$f_1(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}.$$

La funzione $f_1 \circ f: U \rightarrow D$ non assume il valore 0, perciò, essendo U semplicemente connesso, è ben definita una sua radice quadrata $f_2(z) = \sqrt{f_1(f(z))}$. Prendiamo infine un secondo automorfismo f_3 di D che mandi $f_2(0) = \sqrt{-z_0}$ in 0. La composizione $g = f_3 \circ f_2$ è per costruzione un elemento di A .

Calcoliamo $g'(0)$, e per fare questo poniamo

$$h(z) = f_1^{-1}((f_3(z))^2),$$

di modo che $f = h \circ g$. Si ricava allora

$$f'(0) = h'(0)g'(0). \tag{4.1}$$

D'altra parte h è una funzione da D in sé che fissa l'origine, perciò il lemma di Schwartz garantisce che $h'(0) \leq 1$; inoltre varrà l'uguaglianza se e solo se h è una rotazione. Tuttavia h non è iniettiva, perciò $h'(0) < 1$, e per la (4.1) si trova $g'(0) > f'(0)$, che è una contraddizione. \square

A questo punto sappiamo che due aperti propri semplicemente connessi di \mathbb{C} sono tra loro biolomorfi. Un problema naturale che si pone è quando questo biolomorfismo si estende sul bordo. Questo problema è in generale piuttosto complesso, ma una condizione ragionevole sufficiente a garantire l'estensione è la seguente.

Definizione 4.4. Sia X una varietà, $U \subset X$ un aperto. Diciamo che U è un aperto C^1 se per ogni punto $x \in \partial U$ esiste una carta $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^k$ di classe C^1 tale che $\varphi(V \cap \partial U)$ sia contenuto in un iperpiano H di \mathbb{R}^k e $\varphi(V \cap U)$ sia contenuto in uno dei due semispazi delimitati da H . In questo caso $(U, \partial U)$ ha una naturale struttura di varietà con bordo.

Proposizione 4.5. Siano U e V due aperti C^1 limitati di \mathbb{C} e sia $h: U \rightarrow V$ un biolomorfismo. Allora h si estende ad un omeomorfismo tra \bar{U} e \bar{V} .

5. ALTRE CARATTERIZZAZIONI DEL DISCO

Anche se non è necessario per ottenere il teorema di uniformizzazione, in questa sezione vediamo altre caratterizzazioni del disco unitario. Il teorema di Riemann asserisce che, a meno di biolomorfismi, il disco è l'unico dominio proprio del piano semplicemente connesso. Adesso mostreremo che il disco è anche caratterizzato dall'essere l'unico dominio con molti automorfismi, in un senso opportuno. I risultati principali di questa sezione sono il teorema 5.2 e il suo corollario 5.6. In particolare quest'ultimo caratterizza il disco tra tutti i domini C^1 limitati di \mathbb{C} : il disco è l'unico dominio, a meno di biolomorfismi, ad avere un gruppo non compatto di automorfismi. Gli automorfismi del disco saranno classificati nella sezione 9. Gli argomenti di questa sezione sono tratti da [KK05].

Definizione 5.1. Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto, e sia $p \in \partial U$. Diremo che p è un *punto di accumulazione per orbite* se esiste un punto $q \in U$ e una successione di automorfismi $\varphi_j \in \text{Aut}(U)$ tali che $\varphi_j(q) \rightarrow p$.

Teorema 5.2 (Rosay, Wong). Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio C^1 e supponiamo che esista un punto di accumulazione per orbite $p \in \partial U$. Allora U è biolomorfo al disco unitario.

Prima di iniziare la dimostrazione, facciamo qualche osservazione.

Definizione 5.3. Sia U un aperto di \mathbb{C} , e sia p un punto su ∂U . Una funzione continua $\mu: \overline{U} \rightarrow \overline{D}$ è detta *a picco* se è olomorfa su U e assume il valore 1 esattamente in p (dunque $|\mu(z)| < 1$ se $z \neq p$).

Ogni aperto C^1 ha una funzione a picco in ogni punto di bordo. Sia infatti $s = pp'$ un segmento perpendicolare a ∂U in p , di verso uscente da U ; prendiamo p' abbastanza vicino a p in modo che s sia tutto esterno a U . Possiamo allora considerare un'omografia ψ_1 che porti p in 0 e p' in ∞ , di modo che $\psi_1(s)$ sia l'asse reale negativo (per la definizione e le principali proprietà delle omografie, si veda la sezione 9). Su $\mathbb{C} \setminus s$ è allora definita la funzione $\sqrt{\psi_1(z)}$, a valori nel semipiano $\Re(z) > 0$. Infine per ottenere una funzione a picco ci basta comporre questa con un'omografia che mandi il semipiano destro nell'interno della circonferenza unitaria, mandando l'origine nel punto 1. Perciò se poniamo $\psi_2(z) = \sqrt{z}$, $\psi_3(z) = (1+z)/(1-z)$ e $\psi_4(z) = (z+1)/2$, la composizione $\psi_4 \circ \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1$ è una funzione a picco in p .

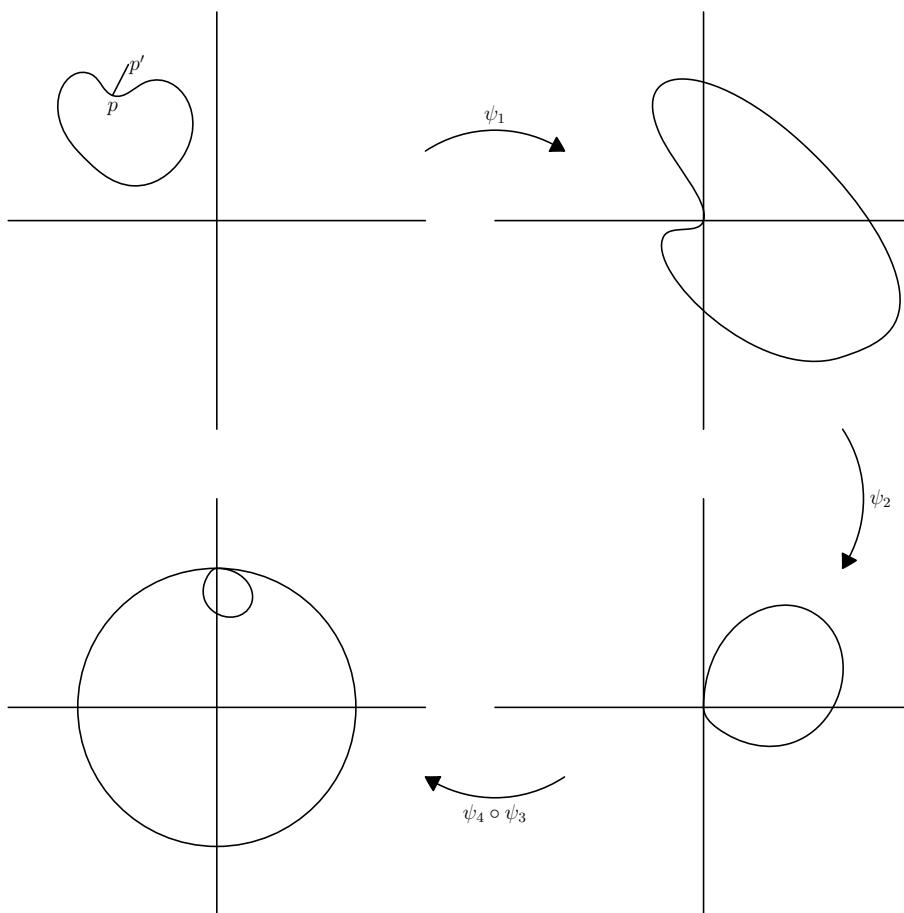


FIGURA 1. Costruzione di una funzione a picco come composizione di funzioni elementari.

Possiamo ora passare alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Per il teorema di Riemann è sufficiente vedere che U è semplicemente connesso. Sia μ una funzione a picco in p , e sia $g_j = \mu \circ \varphi_j$. Osserviamo che le funzioni g_j hanno norma limitata da 1. Per i risultati della sezione 3, a meno di estrarre una sottosuccessione, le g_j convergono uniformemente sui compatti ad una funzione g .

Per costruzione $|g(z)| \leq 1$ per ogni $z \in U$, mentre

$$g(q) = \lim_{j \rightarrow +\infty} g_j(q) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mu(\varphi_j(q)) = \mu(p) = 1.$$

Per il principio del massimo $g \equiv 1$. Poiché μ assume valore 1 solo in p , le funzioni φ_j convergono uniformemente sui compatti alla costante p .

Osserviamo che se B è un disco sufficientemente piccolo centrato in p , allora $B \cap U$ è semplicemente connesso, perché U ha bordo regolare.

Sia ora $\gamma: S^1 \mapsto U$ un laccio continuo. L'immagine di γ è compatta, perciò se j è abbastanza grande $\varphi_j(\gamma(S^1)) \subset B$. Essendo $B \cap U$ semplicemente connesso, il laccio $\varphi_j \circ \gamma$ è omotopo al laccio banale in U , e dunque anche γ lo è. □

Osserviamo che anche il viceversa del teorema 5.2 è vero, in una forma forte. Esplicitamente se U è un dominio C^1 biolomorfo al disco unitario, comunque si scelgano $q \in U$ e $p \in \partial U$, esiste una successione $\{\varphi_j\}$ di automorfismi di U tali che $\varphi_j(q) \rightarrow p$. Questo risultato segue immediatamente dalla proposizione 4.5, che ci permette di estendere al bordo un biolomorfismo con il disco, e dalla classificazione degli automorfismi del disco nella sezione 9.

Tra i domini limitati è possibile un'altra caratterizzazione del disco in termini di quanti automorfismi possiede. Dato un aperto $U \subset \mathbb{C}$ indichiamo con $\text{Aut}(U)$ il suo gruppo degli automorfismi. $\text{Aut}(U)$ è contenuto in $C(U)$, perciò diventa un gruppo topologico con la topologia di sottospazio (su $C(U)$ usiamo, al solito, la topologia della convergenza uniforme sui compatti). Se sappiamo che U è limitato, da ogni successione di automorfismi possiamo estrarre una sottosuccessione convergente ad una funzione olomorfa, grazie alla proposizione 3.5. In generale non è detto che il limite sia anch'esso un automorfismo di U ; la proposizione seguente mostra però che l'unica eccezione si ha quando il limite è costante.

Proposizione 5.4. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio limitato e $\{\varphi_j\}$ una successione di automorfismi di U che converge uniformemente sui compatti ad una funzione φ . Allora φ è anch'essa un automorfismo di U , oppure è costante. In quest'ultimo caso $\varphi(U) \in \partial U$.*

Dimostrazione. Poiché $\varphi_j(U) \subset U$ per ogni j , sappiamo che $\varphi(U) \subset \overline{U}$.

Supponiamo dapprima che $\varphi(U) \not\subset U$, cioè che esista $z \in \partial U$ nell'immagine di φ . Ne segue che φ non può essere una funzione aperta; per il lemma 2.2 possiamo concludere che φ è costante.

Supponiamo allora che $\varphi(U) \subset U$ e mostriamo che in questo caso φ è un automorfismo. Essendo U limitato, le funzioni φ_j^{-1} sono equilimitate, e dunque equicontinue per la proposizione 3.5. A meno di estrarre sottosuccessioni possiamo allora supporre che $\varphi_j^{-1} \rightarrow \psi \in \mathcal{O}(U)$. Per concludere ci basta mostrare che φ e ψ sono una l'inversa dell'altra.

Sia $z \in U$ e poniamo $w = \varphi(z) \in U$. Utilizziamo il fatto che le φ_j^{-1} sono equicontinue in w . Dato $\varepsilon > 0$ possiamo allora fissare $\delta > 0$ in modo che per ogni j

$$|\varphi_j^{-1}(w') - \varphi_j^{-1}(w)| < \varepsilon$$

se $w' \in B(w, \delta)$. Sia ora j sufficientemente grande, in modo che $\varphi_j(z) = w' \in B(w, \delta)$. La disuguaglianza precedente ci dice che $\varphi_j^{-1}(w) \in B(z, \varepsilon)$. Passando al limite su j troviamo che $\psi(w) = z$.

Abbiamo così dimostrato che $\psi \circ \varphi = \text{id}_U$; in particolare ψ non è costante. La prima parte della dimostrazione ci dice allora che $\psi(U) \subset U$. Possiamo allora ripetere l'argomentazione in modo simmetrico e concludere che $\varphi \circ \psi = \text{id}_U$. \square

A questo punto è facile tradurre la condizione, un po' tecnica, dell'esistenza di punti di accumulazione per orbite nella non compattezza del gruppo degli automorfismi.

Proposizione 5.5. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio C^1 e sia $\text{Aut}(U)$ il suo gruppo di automorfismi.*

- (1) *Se U ammette un punto di accumulazione per orbite, allora $\text{Aut}(U)$ non è compatto.*
- (2) *Viceversa se U è limitato e $\text{Aut}(U)$ è non compatto, U ammette un punto di accumulazione per orbite.*

La proposizione precedente, unita al teorema 5.2, ci permette di ottenere subito la caratterizzazione che cerchiamo del disco unitario in termini del gruppo di automorfismi.

Corollario 5.6. *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un dominio C^1 limitato. Se $\text{Aut}(U)$ è non compatto, U è biolomorfo al disco unitario.*

Dimostrazione della proposizione 5.5. (1) Sia $q \in U$ e supponiamo che esista una successione di automorfismi φ_j tali che $\varphi_j(q) \rightarrow p \in \partial U$. Supponiamo per assurdo $\text{Aut}(U)$ sia compatto; a meno di estrarre una sottosuccessione possiamo allora assumere che $\varphi_j \rightarrow \varphi \in \text{Aut}(U)$. Allora $\varphi(q) = p$ non può essere sul bordo.

- (2) Dimostriamo che se non esistono punti di accumulazione per orbite, $\text{Aut}(U)$ è compatto. Sia $\{\varphi_j\}$ una successione di automorfismi. A meno di estrarre sottosuccessioni possiamo supporre che le funzioni φ_j tendano ad una funzione olomorfa $\varphi: U \rightarrow \overline{U}$ (perché U è limitato e per i risultati della sezione 3). Più precisamente possiamo dire che $\varphi(U) \subset U$, altrimenti U avrebbe un punto di accumulazione per orbite. La proposizione 5.4 ci dice allora che φ è un automorfismo. \square

6. MORFISMI TRA SUPERFICI DI RIEMANN COMPATTE

Come abbiamo notato, la dimostrazione del teorema 1.2 è sostanzialmente diversa a seconda che la superficie di Riemann X sia o meno compatta. Nelle prossime due sezioni dimostreremo il

Teorema 6.1. *Sia X una superficie di Riemann compatta, semplicemente connessa. Allora X è biolomorfa a \mathbb{CP}^1 .*

Ulteriori dettagli su questi argomenti si trovano in [GH94, cap. 2], o con un approccio più elementare in [Mir95].

Iniziamo studiando la struttura di una funzione tra due superfici di Riemann compatte.

Proposizione 6.2. *Siano X e X' due superfici di Riemann compatte, $f: X' \rightarrow X$ olomorfa non costante. Allora esiste un insieme finito $B \subset X$ tale che, posto $R = f^{-1}(B)$, la funzione $f|_{X' \setminus R}: X' \setminus R \rightarrow X \setminus B$ sia un rivestimento finito.*

Il grado del rivestimento è detto grado della mappa f ; f si dice in questo caso un rivestimento ramificato. Osserviamo che ogni funzione olomorfa fra superfici di Riemann mantiene l'orientazione naturale (data dalla struttura complessa); ne segue che il grado, definito come cardinalità della controimmagine di un punto $x \in X \setminus B$, coincide con il grado definito, ad esempio, in [Mil97] o in [Hir99].

Dimostrazione. Essendo f olomorfa, il differenziale si annulla in punti isolati. Sia infatti $x \in X'$ un punto non isolato di $\{df = 0\}$: in uno sviluppo locale si trova che f' ha uno zero non isolato, dunque è localmente nulla, cioè f è localmente costante intorno a x . Dalla connessione di X' segue facilmente che f è allora costante.

Per la compattezza di X' si trova che df si annulla in un numero finito di punti; sia B l'immagine di questo insieme finito. Posto $R = f^{-1}(B)$, il teorema di inversione locale ci garantisce che f è un biolomorfismo locale in ogni punto di $X' \setminus R$. Inoltre f è una funzione olomorfa non costante, quindi è aperta. In particolare $f(X')$ è aperto in X , ma è anche chiuso per compattezza di X' , dunque f è suriettiva.

Sia ora $x \in X \setminus B$: $f^{-1}(x)$ è un chiuso di X' , che consiste di punti isolati (ancora perché f è non costante). Per compattezza troviamo che $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_r\}$ è un insieme finito. Ma f è un biolomorfismo locale intorno a ciascun y_i ; essendo questi in numero finito, un intorno abbastanza fine di x è ben ricoperto. \square

Sia ora $x \in B$ (branch point) e D un disco aperto intorno a x sufficientemente piccolo. Se chiamiamo $D' = D \setminus \{x\}$ il disco puntato, allora

$$f|_{f^{-1}(D')}: f^{-1}(D') \rightarrow D'$$

è un rivestimento. Sia y una controimmagine di x (ramification point), e sia E un disco intorno a y . Il grado locale del rivestimento $E \setminus \{y\} \rightarrow D'$ si indica con $v(y)$.

Se $y \notin R$ possiamo dare la stessa definizione di $v(y)$, ma in questo caso chiaramente $v(y) = 1$, visto che il rivestimento si estende ad un disco intorno a $f(y)$, e ogni rivestimento connesso del disco è banale, perché il disco è semplicemente connesso. Per costruzione vale la seguente formula per ogni $x \in X$

$$\sum_{y \in f^{-1}(x)} v(y) = d, \tag{6.1}$$

dove d è il grado di f . Abbiamo dunque un modo per contare la molteplicità di f nei punti in R , in modo che il numero di controimmagini di un punto in X , contato con molteplicità, sia costante.

Possiamo dare anche un'altra interpretazione della molteplicità di f in un punto y . Fissiamo coordinate centrate rispettivamente in y e in x . Rispetto a queste

coordinate f ha uno sviluppo in serie di Taylor

$$f(z) = \sum_{loc, n=k}^{+\infty} a_n z^n,$$

dove k è il minimo intero per cui $a_k \neq 0$ (in particolare $k \geq 1$, perché $f(y) = x$). Possiamo perciò scrivere $f(z) = z^k g(z)$, dove $g(0) \neq 0$. La funzione z^k è un isomorfismo locale tranne che in 0, perciò possiamo scrivere localmente $g(z) = (h(z))^k$, per un'opportuna funzione olomorfa h , $h(0) \neq 0$. Ne segue che

$$f(z) = (zh(z))^k,$$

cioè f è composizione della funzione $zh(z)$ con la potenza k -esima. La funzione $zh(z)$ si annulla in 0 ed ha derivata non nulla in 0, dunque è un isomorfismo locale. Ne segue che il rivestimento $E \setminus \{y\} \mapsto D'$ è localmente isomorfo al rivestimento

$$\begin{aligned} D' &\mapsto D' \\ z &\mapsto z^k. \end{aligned}$$

In conclusione troviamo che $v(y) = k$ è pari all'ordine di annullamento di f in 0 in un'espressione locale.

A questo punto citiamo, anche se non ne faremo uso per dimostrare il teorema di uniformizzazione, la celebre formula di Riemann-Hurwitz.

Teorema 6.3. *Sia $f: X' \mapsto X$ una funzione olomorfa non costante tra superfici di Riemann, d il grado di f . Allora*

$$\chi(X') = d\chi(X) - \sum_{y \in R} (v(y) - 1) \quad (6.2)$$

Una dimostrazione della formula si ottiene semplicemente nel modo che descriviamo, senza entrare nei dettagli. Per prima cosa si prende una triangolazione di X fatta in modo che ogni punto di B compaia come vertice. Si solleva la triangolazione a X' , in modo che ogni faccia o spigolo in X sia ricoperto da esattamente d facce o spigoli in X' . Lo stesso sarà vero per i vertici, tranne quelli in B , che avranno un numero di controimmagini minore, esprimibile in termini di $v(y)$ per $y \in f^{-1}(x)$. Infine si scrive l'usuale espressione della caratteristica dei Eulero in termini di una triangolazione ($\chi(X) = f - e + v$) e si ottiene la formula.

7. UNIFORMIZZAZIONE: IL CASO IN CUI X È COMPATTA

Per arrivare a dimostrare il teorema 6.1 abbiamo ancora bisogno di alcuni strumenti. Per prima cosa richiamiamo il fatto che le superfici reali sono classificate, a meno di diffeomorfismo, e ricadono in una di due famiglie numerabili, a seconda che siano o meno orientabili. Il caso che ci interessa è quello di una superficie di Riemann, che ha sempre un'orientazione naturale data dalla struttura complessa. Faremo perciò uso del seguente teorema di classificazione (vedi [Hir99, cap. 9]).

Teorema 7.1. *Sia X una superficie reale orientabile. Allora X è diffeomorfa esattamente ad un membro della famiglia $\{M_g | g \in \mathbb{N}\}$, dove M_g è la superficie che si ottiene incollando g manici alla sfera S^2 . L'intero g è detto genere della superficie.*

Il procedimento di attaccare un manico ad una superficie X è il seguente. Innanzitutto si scelgono due dischi in X e si rimuove la loro parte interna, ottenendo una superficie con bordo X' . Poi si prende un cilindro $C = [0, 1] \times S^1$ e si identificano le due circonferenze di bordo di C con quelle di X' , in maniera compatibile con l'orientazione. Non è difficile vedere che allo spazio topologico quoziente si riesce a dare una struttura differenziabile.

Introduciamo ora gli oggetti protagonisti di questo paragrafo.

Definizione 7.2. Sia X una superficie di Riemann compatta. Indichiamo con $Div(X)$ il gruppo abeliano libero generato dai punti di X . Un elemento di $Div(X)$, cioè una combinazione lineare formale a coefficienti interi di punti di X è detto un *divisore*. Un divisore D si dice *effettivo* (e si indica $D \geq 0$) se i suoi coefficienti sono tutti non negativi.

Sia f una funzione meromorfa su X non costante, o equivalentemente una funzione olomorfa non identicamente nulla $f: X \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Ad f possiamo associare un divisore, che indicheremo come (f) , ponendo

$$(f) = \sum_{p \in f^{-1}(0)} v(p)p - \sum_{p \in f^{-1}(\infty)} v(p)p.$$

Dalla definizione si ricava subito che $(fg) = (f) + (g)$. Se indichiamo $\mathcal{M}^*(X)$ il gruppo moltiplicativo delle funzioni meromorfe non nulle su X , abbiamo un omomorfismo

$$(\cdot): \mathcal{M}^*(X) \rightarrow Div(X).$$

Diremo che due divisori $A, B \in Div(X)$ sono linearmente equivalenti se $A = B + (f)$ per qualche $f \in \mathcal{M}^*(X)$.

Un altro omomorfismo naturale è l'omomorfismo

$$\begin{aligned} \deg: Div(X) &\rightarrow \mathbb{Z}. \\ \sum a_p p &\mapsto \sum a_p \end{aligned}$$

Dal principio dell'argomento (teorema 2.5) segue che se X una superficie di Riemann compatta e f una funzione meromorfa, il numero di zeri e il numero di poli, contati con molteplicità, sono lo stesso. dunque abbiamo la

Proposizione 7.3. *Sia $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Allora $\deg(f) = 0$.*

Un modo per ottenere divisori con grado non nullo è quello di partire da una forma differenziale. Sia infatti ω una 1-forma meromorfa su X . Questo significa che ω è una sezione del fibrato cotangente (olomorfo) di X , che può avere dei poli isolati. Localmente intorno a $p \in X$ il fibrato cotangente si banalizza, e si può dunque scrivere

$$\omega(z) \underset{loc}{=} f(z)dz,$$

per un'opportuna funzione meromorfa f . Possiamo allora definire l'ordine di polo (o di zero) di ω in p (che indicheremo ancora $v(p)$) come l'ordine di polo o di zero di f ; è una semplice verifica che quest'ordine non dipende dalla banalizzazione. Poniamo allora

$$(\omega) = \sum_{p \in X} v(p)p,$$

somma che è ben definita perché ω ha un numero finito di zeri o di poli.

Se ω' è un'altra 1-forma meromorfa, allora, poiché il fibrato cotangente ha rango 1, possiamo scrivere $\omega' = f\omega$ per un'opportuna $f \in \mathcal{M}^*(X)$. Dall'espressione locale segue subito che $(\omega') = (\omega) + (f)$.

Proposizione 7.4. *Siano ω, ω' due forme meromorfe su X . Allora i divisori (ω) e (ω') sono linearmente equivalenti. In particolare $\deg(\omega) = \deg(\omega')$.*

Resta in questo modo definito univocamente un divisore su X , a meno di equivalenza lineare, dato da (ω) ; tale divisore è detto *canonico*, e si indica con K_X .

Ad un divisore possiamo associare un sottospazio vettoriale delle funzioni meromorfe: poniamo

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}^*(X) \mid (f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

La proposizione seguente è una semplice verifica.

Proposizione 7.5. *L'insieme $\mathcal{L}(D)$ è uno spazio vettoriale, e se $\deg D < 0$, allora consiste del solo 0.*

Per la seconda affermazione basta osservare che $\deg((f) + D) = \deg D$, dunque se questo grado è negativo almeno un coefficiente di $(f) + D$ deve essere negativo.

Il risultato principale, che non dimostreremo, è il seguente:

Teorema 7.6 (Riemann-Roch). *Sia X una superficie di Riemann compatta, g il suo genere. Allora per ogni $D \in \text{Div}(X)$ $\mathcal{L}(D)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{C} . Se indichiamo con $\ell(D)$ la sua dimensione, vale la formula*

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg D - g + 1.$$

Per una dimostrazione rimandiamo a [GH94, §2.3] o [Mir95, cap. 6].

Corollario 7.7. (1) $\ell(K_X) = g$
(2) $\deg(K_X) = 2g - 2$.

Dimostrazione. Osserviamo che se $D = 0$, allora $\mathcal{L}(D) = \mathcal{O}(X)$ è lo spazio delle funzioni olomorfe su X ; questo consiste delle sole costanti per il principio del massimo e la compattezza di X . La prima tesi segue allora da Riemann-Roch, applicato con $D = 0$. Una volta nota la prima uguaglianza, la seconda segue ancora da Riemann-Roch, stavolta con $D = K_X$. \square

Utilizzando questo risultato possiamo dare una dimostrazione del teorema 6.1.

Dimostrazione. Sia X una superficie di Riemann compatta semplicemente connessa; iniziamo con l'osservare che X ha genere 0. Infatti il teorema di Van Kampen permette facilmente di calcolare $\pi_1(M_g) = \mathbb{Z}^{*g}$, che è banale solo per $g = 0$. Prendiamo $p, q \in X$ applichiamo il teorema di Riemann-Roch con $D = p - q$. Troviamo

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = 1.$$

D'altronde per il corollario il canonico di X ha grado -2 , dunque $\ell(K_X - D) = 0$ per la proposizione 7.5; in conclusione $\ell(D) = 1$, cioè esiste, a meno di multipli, esattamente una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ nulla in q e con al più un polo semplice in p .

In particolare $f(q) = 0$ ci dice che f non è costante, non essendo identicamente nulla. Dunque f è un rivestimento ramificato, in particolare è suriettiva. Per costruzione $f^{-1}(\infty)$ contiene al più p , e per suriettività consiste esattamente di p .

Ne segue che f ha effettivamente un polo semplice in p , e dall'espressione locale di $v(p)$ si trova $v(p) = 1$. La (6.1) implica che f ha grado 1, e la stessa formula forza f ad essere biunivoca, e ci dice che $v(x) = 1$ per ogni $x \in X$. In particolare f è un biolomorfismo locale, e quindi un biolomorfismo. \square

Osserviamo che più in generale abbiamo dimostrato che un rivestimento ramificato di grado 1 tra superfici di Riemann è un biolomorfismo.

8. UNIFORMIZZAZIONE: IL CASO IN CUI X NON È COMPATTA

In questa sezione riconduciamo il teorema di uniformizzazione al caso particolare studiato nella sezione 4. Usando il teorema 6.1 dimostreremo il seguente lemma, e dunque il teorema di uniformizzazione. La dimostrazione è presa da [Dem97, §VIII.11], con alcune semplificazioni.

Lemma 8.1. *Sia X una superficie di Riemann semplicemente connessa e non compatta. Allora X ammette un embedding olomorfo in \mathbb{C} .*

Per arrivare a questo consideriamo una successione esaustiva di aperti connessi di X , data da $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset X$. Prendiamo gli aperti in modo che Ω_k sia relativamente compatto in Ω_{k+1} e $\bigcup_k \Omega_k = X$. L'idea è di invadere X con aperti che siano topologicamente dei dischi, costruire un embedding per ciascun Ω_k e ottenere un embedding per X come limite di quelli sugli aperti. Chiaramente se gli aperti Ω_k non sono scelti ad hoc non possiamo sperare che questo funzioni. Richiediamo allora di prendere gli Ω_k in modo che $X \setminus \Omega_k$ non abbia componenti connesse compatte (intuitivamente Ω_k non deve avere buchi). Questo può essere fatto aggiungendo ad Ω_k le componenti connesse compatte del complementare. Non è difficile verificare che in questo modo Ω_k resta a chiusura compatta in Ω_{k+1} .

Con un po' più di lavoro si riesce a vedere che si possono prendere come Ω_k degli aperti C^1 . In particolare $(\Omega_k, \partial\Omega_k)$ è una superficie con bordo.

Definizione 8.2. Sia $(X, \partial X)$ una varietà con bordo. La varietà (senza bordo) che si ottiene incollando due copie di X lungo ∂X è detto il doppio di X e si indica $X \natural X$.

La seguente proposizione mostra che $\Omega_k \natural \Omega_k$ ha una naturale struttura di superficie di Riemann che estende quella di Ω_k . Questa costruzione è piuttosto utile perché mostra come, in alcuni casi, una superficie di Riemann non compatta si possa immergere dentro una compatta.

Proposizione 8.3. *Sia X una superficie di Riemann, $\Omega \subset X$ un aperto C^1 relativamente compatto. Allora $\Omega \natural \Omega$ ammette una struttura di superficie di Riemann che estende quella di Ω .*

Dimostrazione. Sia (Y, \mathcal{A}_Y) una varietà complessa; indichiamo esplicitamente l'atlante \mathcal{A}_Y perché andiamo a considerare sulla varietà reale soggiacente Y una diversa struttura complessa. Costruiamo un secondo atlante $\overline{\mathcal{A}}_Y$ dichiarando che se $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}^n$ è una carta di \mathcal{A}_Y , allora $\overline{\varphi}$ è una carta di $\overline{\mathcal{A}}_Y$. La compatibilità segue dal fatto che la composizione due funzioni antiolomorfe è olomorfa. L'orientazione indotta su Y da $\overline{\mathcal{A}}_Y$ è opposta a quella indotta da \mathcal{A}_Y .

Per costruire una struttura di varietà complessa su $\Omega \natural \Omega$ diamo ad una copia di Ω la sua struttura standard, all'altra quella coniugata. Rimane il problema di definire delle carte nell'intorno dei punti di $\partial\Omega$. Sia dunque $x \in \partial\Omega$; ci basta dimostrare che esistono:

- (1) un intorno W di x e
- (2) una carta locale di X , $\varphi: U = W \cap \Omega \mapsto \mathbb{C}$ che si estende con continuità su \overline{U}

tali che $\varphi(\overline{U} \cap \partial\Omega) \subset \mathbb{R}$. Infatti la carta di $\Omega \natural \Omega$ in x si otterrà incollando φ su una copia di $\overline{\Omega}$ con la sua coniugata sull'altra copia. Bisogna verificare la compatibilità delle carte così ottenute. Questa verifica è immediata, tranne che nel caso di due carte intorno a due punti x, y di $\partial\Omega$. In questo caso, se i relativi aperti si intersecano, il cambio di carta risulta continuo, e olomorfo tranne al più sulla retta reale: per il teorema di Morera è allora olomorfo ovunque.

Per ottenere la carta φ partiamo da una carta ψ qualunque intorno a x . L'immagine tramite ψ di $\partial\Omega$ è un arco di curva in \mathbb{C} , con estremi a e b . Possiamo chiudere questa curva con un arco di circonferenza che unisca a e b . Quello che otteniamo, se ψ è definita su un intorno sufficientemente piccolo di x , è una curva γ che borda una regione V di \mathbb{C} omeomorfa ad un disco. Per il teorema di uniformizzazione esiste un biolomorfismo $h: V \mapsto D$, e per la proposizione 4.5 h si estende ad un omeomorfismo tra \overline{V} e \overline{D} . A meno di comporre con una rotazione possiamo supporre che $h(\psi(x)) \neq -1$. A questo punto componiamo con la funzione

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z}: \overline{D} \mapsto \overline{H}$$

per ottenere una carta che manda un aperto di Ω nel semipiano superiore H e manda un aperto di $\partial\Omega$ in un aperto di \mathbb{R} . \square

Il nostro prossimo compito è quello di investigare la topologia di $A_k = \Omega_k \natural \Omega_k$. Per fare questo utilizzeremo alcuni fatti elementari sulla coomologia di De Rham di una varietà, che si trovano ad esempio in [Lee03, cap. 11]. In particolare useremo la seguente conseguenza della dualità di Poincaré:

Proposizione 8.4. *Sia X una superficie orientabile.*

- (1) $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$ se e solo se $H_c^1(X, \mathbb{R}) = 0$.
- (2) Se X è semplicemente connessa, allora $H^1(X, \mathbb{R}) = 0$.

La prima asserzione è una conseguenza immediata della dualità di Poincaré. Per la seconda ricordiamo che $H_1(X, \mathbb{Z})$ è l'abelianizzato di $\pi_1(X)$, in particolare $H_1(X, \mathbb{R}) = 0$ se X è semplicemente connessa, e la tesi segue di nuovo dalla dualità di Poincaré.

Lemma 8.5. A_k è una superficie di Riemann compatta di genere 0.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che A_k ammette una struttura di superficie di Riemann, e la compattezza è chiara, essendo Ω_k a chiusura compatta in X . Per

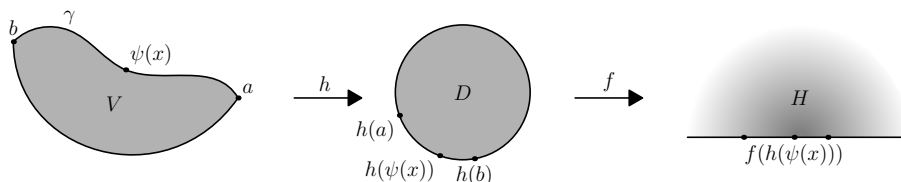


FIGURA 2. Costruzione della carta locale nei punti di $\partial\Omega$.

vedere che A_k ha genere 0 ci basta mostrare che $H^1(A_k, \mathbb{R}) = 0$. Sottintendiamo nel resto della dimostrazione che la coomologia è a coefficienti reali.

Per la proposizione precedente sappiamo che $H^1(X) = H_c^1(X) = 0$. Mostriamo innanzitutto che $H_c^1(\Omega_k) = 0$. Per questo sia ω una 1-forma a supporto compatto in Ω_k . Possiamo estendere ω a 0, ottenendo una forma su tutto X ; avendo X coomologia a supporto compatto banale possiamo scrivere $\omega = df$ per qualche $f \in C_c^\infty(X)$. Per costruzione $df = 0$ sul complementare di Ω_k , perciò f è costante su ciascuna componente connessa. Ma noi abbiamo costruito Ω_k in modo che il complementare non avesse componenti connesse compatte, perciò $f = 0$ su ciascuna componente. Ne segue f si annulla sul complementare di Ω_k , perciò $f \in C_c^\infty(\Omega_k)$. In conclusione $H_c^1(\Omega_k) = 0$, e per la proposizione sappiamo anche che $H^1(\Omega_k) = 0$.

Per calcolare $H^1(A_k)$ vogliamo usare la successione esatta di Mayer-Vietoris, ma per questo abbiamo bisogno di calcolare anche la coomologia di $\partial\Omega$. Osserviamo che per definizione $H^1(\Omega_k, \partial\Omega_k) = H_c^1(\Omega_k) = 0$. Dalla successione esatta

$$\cdots H^0(\Omega_k) \longrightarrow H^0(\partial\Omega_k) \longrightarrow H^1(\Omega_k, \partial\Omega_k) \cdots$$

e dal fatto che Ω_k è connesso si trova $H^0(\partial\Omega_k) = \mathbb{R}$.

Per concludere usiamo la successione di Mayer-Vietoris per il ricoprimento di A_k dato da due intorni delle due copie di Ω_k . Possiamo scegliere gli intorni in modo che si retraggano su Ω_k , e che la loro intersezione si retragga su $\partial\Omega_k$. In questo modo abbiamo la successione esatta

$$\cdots H^0(\Omega_k) \oplus H^0(\Omega_k) \longrightarrow H^0(\partial\Omega_k) \longrightarrow H^1(A_k) \longrightarrow H^1(\Omega_k) \oplus H^1(\Omega_k) \cdots$$

Per quanto abbiamo visto la prima mappa corrisponde alla mappa differenza $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, pertanto è suriettiva. Inoltre $H^1(\Omega_k) = 0$, perciò si ricava $H^1(A_k) = 0$. \square

Corollario 8.6. Ω_k ammette un embedding in \mathbb{C} .

Dimostrazione. Per il teorema di uniformizzazione nel caso compatto sappiamo che A_k è biolomorfo a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Un tale biolomorfismo manda Ω_k in un aperto proprio di $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, e dunque in un aperto di \mathbb{C} . \square

A questo punto possiamo dimostrare il lemma 8.1, e conseguentemente il teorema di uniformizzazione. Per ciascun aperto Ω_k abbiamo costruito un embedding

$$\varphi_k: \Omega_k \hookrightarrow \mathbb{C}.$$

Fissiamo un punto $x \in \Omega_1$ e una coordinata locale intorno a x . A meno di comporre le φ_k con un'affinità possiamo supporre che $\varphi_k(x) = 0$ per ogni k , e che rispetto alla coordinata fissata si abbia $\varphi_k'(x) = 1$. Ciascun compatto è coperto da un numero finito di aperti Ω_k , perciò su ciascun compatto sono definite tutte le φ_k tranne un numero finito; in particolare ha senso parlare di convergenza uniforme sui compatti.

Per la proposizione 3.7 le φ_k sono equilimitate intorno a x ; vogliamo vedere che sono equilimitate sui compatti. Essendo la successione $\{\Omega_k\}$ esaustiva ci basta far vedere che sono equilimitate su $\overline{\Omega_i}$ per ogni i . Per la compattezza di $\overline{\Omega_i}$ ci basta far vedere che sono equilimitate localmente intorno a ciascun punto di $\overline{\Omega_i}$. Sia

$$E_i = \{y \in \overline{\Omega_i} \mid \text{la successione } \varphi_k \text{ è localmente equilimitata intorno a } y\}.$$

Per costruzione $x \in E_i$; inoltre è immediato dalla definizione che E_i è aperto. Ma il lemma 3.8 ci assicura che E_i è anche chiuso, perciò $E_i = \overline{\Omega_i}$ per connessione.

Dunque a meno di sottosuccessioni abbiamo convergenza uniforme sui compatti delle φ_k ad una funzione olomorfa

$$\varphi: X \mapsto \mathbb{C}.$$

La proposizione 3.6 (o meglio la sua dimostrazione) ci dice che φ è iniettiva o costante; ma $\varphi'(x) = 1$, il che esclude che possa essere costante. In conclusione φ è l'embedding cercato.

9. CLASSIFICAZIONE DEGLI AUTOMORFISMI

Sia X una superficie di Riemann, \tilde{X} il suo rivestimento universale. \tilde{X} ammette una naturale struttura di superficie di Riemann, che rende la proiezione $\tilde{X} \mapsto X$ olomorfa, pertanto il teorema di uniformizzazione prevede che $\tilde{X} = \mathbb{C}$, D oppure \mathbb{CP}^1 . Supponiamo ora che X sia compatta; abbiamo allora visto che X ammette un invariante discreto, che è il genere. Il collegamento tra queste due cose è dato dal seguente teorema.

Teorema 9.1. *Sia X una superficie di Riemann compatta, g il suo genere. Allora*

$$\begin{cases} \tilde{X} = X = \mathbb{CP}^1, & g = 0 \text{ oppure} \\ \tilde{X} = \mathbb{C}, & g = 1 \text{ oppure} \\ \tilde{X} = D, & g \geq 2. \end{cases}$$

Dalla teoria dei rivestimenti sappiamo che il gruppo $G = \pi_1(X)$ agisce su \tilde{X} in maniera libera e propriamente discontinua, e X si può ricostruire come $X = \tilde{X}/G$. Inoltre il fatto che la proiezione $\tilde{X} \mapsto X$ sia per costruzione un biolomorfismo locale implica che G agisce su \tilde{X} tramite automorfismi. Da questo si capisce che un primo passo per dimostrare il teorema 9.1 è quello di studiare gli automorfismi delle tre superfici di Riemann semplicemente connesse, e questo è il nostro primo scopo.

Iniziamo costruendo una famiglia di automorfismi di \mathbb{CP}^1 . Sia A un elemento di $GL(2, \mathbb{C})$: A agisce su \mathbb{C}^2 e manda rette per l'origine in rette per l'origine, pertanto abbiamo un'azione di $GL(2, \mathbb{C})$ su \mathbb{CP}^1 . Chiaramente l'azione di A coincide con quella di un suo multiplo scalare, perciò possiamo limitarci a prendere $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Sull'aperto $U_1 = \{[z_1 : z_2] \mid z_1 \neq 0\}$ abbiamo la coordinata locale $z = z_2/z_1$, che dà un'identificazione di U_1 con \mathbb{C} . L'unico punto che resta fuori dalla carta è il punto $[0 : 1]$, che denoteremo ∞ . In questa coordinata l'azione di $SL(2, \mathbb{C})$ ha una descrizione esplicita: se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora

$$A.z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (9.1)$$

con ovvie convenzioni nel caso in cui $z = \infty$ oppure $cz + d = 0$. Da questa scrittura segue che A è olomorfa, pertanto si ha un omomorfismo

$$\varphi: SL(2, \mathbb{C}) \mapsto \text{Aut}(\mathbb{CP}^1).$$

Il nucleo di φ è costituito dalle matrici A che fissano ogni retta per l'origine; è un fatto noto, e di facile verifica, che una tale matrice è un multiplo scalare dell'identità. Ma A è stata normalizzata in modo che $\det A = 1$, perciò $A = \pm \text{id}$.

Definizione 9.2. Un automorfismo di \mathbb{CP}^1 della forma (9.1) è detto un'*omografia*. Le omografie della forma $f(z) = az + b$ sono dette *affinità*; il gruppo delle affinità è indicato con $\text{Aff}(\mathbb{C})$.

Lemma 9.3. *Sia A un'omografia. Allora A manda rette e circonferenze di \mathbb{C} in rette e circonferenze.*

Dimostrazione. Ogni omografia è chiaramente composizione di affinità e dell'omografia $i(z) = 1/z$. La tesi è ovvia per le affinità, ed è una semplice verifica per i , e dunque segue per ogni omografia. \square

Lemma 9.4. (1) *L'azione di $SL(2, \mathbb{C})/\{\pm \text{id}\}$ su \mathbb{CP}^1 è 3-transitiva.*
 (2) *Un'omografia è determinata dal valore che assume in tre punti.*

Dimostrazione. (1) Siano $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{CP}^1$. Allora l'omografia

$$f(z) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0} \frac{z - z_0}{z - z_2}$$

manda z_0 in 0, z_1 in 1 e z_2 in ∞ .

(2) Per la prima parte, ci basta vedere che un'omografia f che fissa 3 punti di \mathbb{C} è l'identità. L'equazione $f(z) = z$ è un'equazione di grado al più 2: se ha tre soluzioni distinte, deve essere banale, cioè $f(z) \equiv z$. \square

Possiamo a questo punto costruire automorfismi anche di \mathbb{C} e di D . Per ottenere un automorfismo di \mathbb{C} basta prendere un'omografia che fissi ∞ . Una tale omografia f deve avere $c = 0$, altrimenti $f(\infty) = a/c$, pertanto è un'affinità.

Per costruire automorfismi di D , indichiamo $C = \partial D$ la circonferenza unitaria. Abbiamo visto che $f(C)$ è una retta o una circonferenza. Ma ogni retta o circonferenza è individuata da tre punti (vediamo le rette come circonferenze contenenti il punto ∞). Perciò se $f(1), f(i), f(-1) \in C$ necessariamente la circonferenza C è fissata. In questo caso f è un automorfismo di D , oppure scambia l'interno di C con l'esterno, a seconda che $f(0) \in D$ o meno.

Possiamo a questo punto enunciare il teorema di classificazione degli automorfismi.

Teorema 9.5 (Liouville). *Ogni automorfismo di \mathbb{CP}^1 , di \mathbb{C} o di D è un'omografia. In particolare*

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{CP}^1) &\cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm \text{id}\} \\ \text{Aut}(\mathbb{C}) &= \text{Aff}(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Osserviamo che il teorema di Liouville per \mathbb{C} implica facilmente il teorema di Liouville per \mathbb{CP}^1 . Sia infatti $f \in \text{Aut}(\mathbb{CP}^1)$. A meno di comporre con un'omografia si può supporre $f(\infty) = \infty$. Ma allora f si restringe ad un automorfismo di \mathbb{C} , perciò è un'omografia.

Determinazione di $\text{Aut}(\mathbb{C})$. Sia f un automorfismo di \mathbb{C} ; in particolare f è una funzione intera, quindi ammette uno sviluppo in serie in 0 con raggio di convergenza infinito:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k.$$

Con il cambio di coordinata $w = 1/z$ questo può essere visto come uno sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di ∞ . Se $a_k \neq 0$ per infiniti k , allora f ha una singolarità essenziale in ∞ . Per il teorema di Casorati-Weierstrass, $f(U)$ è denso in \mathbb{C} per ogni intorno U di ∞ , in particolare f non può essere iniettiva.

Ne segue che $a_k = 0$ definitivamente, cioè f è un polinomio. Per il teorema fondamentale dell'algebra f deve avere grado 1, altrimenti non è iniettiva. In conclusione $f \in \text{Aff}(\mathbb{C})$. \square

Determinazione di $\text{Aut}(D)$. Sia $f \in \text{Aut}(D)$. A meno di comporre con un'omografia possiamo supporre $f(0) = 0$. In queste ipotesi il lemma di Schwartz implica che $|f(z)| \leq |z|$ per ogni $z \in D$, e se vale l'uguaglianza per un certo $z \neq 0$, allora $f(z) = az$ per qualche a con $|a| = 1$. Applicando il lemma di Schwartz a f^{-1} si ricava la disuguaglianza inversa, perciò $|f(z)| = |z|$ per ogni $z \in D$, e f è una rotazione. \square

10. UNA FORMA EFFETTIVA DI UNIFORMIZZAZIONE

In questo paragrafo dimostriamo il teorema 9.1. La prima riga si ottiene facilmente. Sia X una superficie di Riemann compatta. Se X ha genere 0, per il teorema di uniformizzazione $X \cong \mathbb{CP}^1$. Viceversa \mathbb{CP}^1 non riveste superfici di Riemann diverse da se stessa. Infatti ogni automorfismo di \mathbb{CP}^1 è un'omografia, per il teorema 9.5. Ogni applicazione lineare su \mathbb{C}^2 ha almeno un'autovettore, e questo si traduce nel fatto che ogni omografia ha almeno un punto fisso su \mathbb{CP}^1 . Dunque non ci sono gruppi di automorfismi di \mathbb{CP}^1 che agiscano in maniera propriamente discontinua.

Consideriamo ora le superfici X con $\tilde{X} = \mathbb{C}$, ovvero della forma \mathbb{C}/G . G dovrà essere un sottogruppo di $\text{Aut}(\mathbb{C}) = \text{Aff}(\mathbb{C})$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua. Ogni affinità $f(z) = az + b$ con $a \neq 1$ ha un punto fisso, perciò G è un sottogruppo del gruppo delle traslazioni $z \mapsto z + b$, che si può identificare con \mathbb{C} . Affinché l'azione sia propriamente discontinua, G deve essere un sottogruppo discreto.

Lemma 10.1. *Ogni sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n è isomorfo a \mathbb{Z}^k per un opportuno $k \leq n$, generato da k vettori e_1, \dots, e_k linearmente indipendenti.*

A questo punto sappiamo che G può avere uno o due generatori, linearmente indipendenti. Se c'è un solo generatore, il quoziente \mathbb{C}/G non è compatto. Nel caso in cui G abbia rango 2, è un reticolo in \mathbb{C} , e il quoziente è topologicamente un toro, dunque ha genere 1. Una tale superficie è detta un *toro complesso*.

Più in generale notiamo che abbiamo ricavato la seguente classificazione.

Proposizione 10.2. *Sia X una superficie di Riemann (non necessariamente compatta). Allora sono possibili i seguenti casi:*

- (1) X è biomorfa a \mathbb{CP}^1 ;
- (2) X è il quoziente di \mathbb{C} per un sottogruppo G generato da al più 2 vettori linearmente indipendenti su \mathbb{R} ;
- (3) il rivestimento universale di X è D .

A seconda di quale dei tre casi si presenta, X è detta rispettivamente *parabolica*, *ellittica* o *iperbolica*.

Dimostrazione del lemma. Induzione su n . Iniziamo dal caso $n = 1$, e sia $G < \mathbb{R}$ un sottogruppo discreto non banale. Osserviamo che $t = \inf\{x > 0 : x \in G\}$ è un elemento di G . Se così non fosse potremmo scegliere elementi $x_1, x_2 \in G$ positivi e minori di $2t$; $|x_1 - x_2|$ sarebbe allora un elemento di G inferiore a t . Mostriamo ora che $G = \mathbb{Z}t$. Se $x \in G$, sottraendo a x un opportuno multiplo di t otteniamo

un elemento $y \in G$ non negativo e minore di t ; per costruzione si ha $y = 0$, cioè $x \in \mathbb{Z}t$.

Per il passo induttivo consideriamo un sottogruppo discreto $G < \mathbb{R}^n$ non banale. Prendiamo $v \in G$ e consideriamo il sottogruppo $G \cap \mathbb{R}v$. Per il caso $n = 1$ questo è ciclico, generato da un vettore e_1 . Mostriamo ora che $G' = G/\mathbb{Z}e_1$ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}e_1$. Supponiamo infatti di avere nel quoziente una successione di elementi $y_i \in G'$ che tendono a $y \in G'$. Solleviamo ciascun y_i ad un rappresentante x_i , e prendiamo un rappresentante x di y . Allora per opportuni n_i la successione $x_i + n_i e_1$ tende a x , contro l'assunzione che G sia discreto. Per ipotesi induttiva G' è generato da opportuni vettori f_2, \dots, f_k per un opportuno $k \leq n$. Se e_2, \dots, e_k sono vettori rappresentanti di f_2, \dots, f_k , allora e_1, e_2, \dots, e_k sono linearmente indipendenti, e $G = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_k$. \square

Sia ora X una superficie di genere $g \geq 2$. Abbiamo visto che il suo rivestimento universale non può essere $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ né \mathbb{C} , pertanto deve essere D . Per completare la dimostrazione del teorema 9.1 ci basta dimostrare che ogni superficie di Riemann di genere 1 è un toro complesso. In realtà dimostriamo qualcosa di più.

Proposizione 10.3. *Sia X una superficie di Riemann compatta. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

- (1) X ha genere 1;
- (2) X è isomorfa ad una cubica in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (cioè esiste una superficie di Riemann data come luogo di zeri in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ di un polinomio omogeneo di grado 3 isomorfa ad X);
- (3) X ammette una struttura di gruppo di Lie complesso;
- (4) X è isomorfa ad un toro complesso, cioè ad una superficie della forma \mathbb{C}/Λ per un opportuno reticolo $\Lambda \subset \mathbb{C}$.

Una coppia (X, O) , dove X soddisfa una delle quattro proprietà equivalenti e $O \in X$ è detta una curva ellittica.

Osserviamo innanzitutto che le proprietà (4) implica banalmente la (1) e la (3). Le altre frecce non sono così immediate.

(1) \Rightarrow (2). Fissiamo un punto $p \in X$ e applichiamo Riemann-Roch ai divisori np al variare di $n \geq 1$. Poiché $\deg K_X = 0$, $\ell(K_X - np) = 0$ per ogni $n \geq 1$ e la formula ci dà $\ell(np) = n$. In particolare $\mathcal{L}(p)$ contiene le sole costanti; siano $x \in \mathcal{L}(2p)$ e $y \in \mathcal{L}(3p)$ tali che $\{1, x\}$ sia una base di $\mathcal{L}(2p)$ e $\{1, x, y\}$ sia una base di $\mathcal{L}(3p)$.

Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(6p)$ ha dimensione 6, ma contiene almeno le 7 funzioni $1, x, x^2, x^3, y, xy, y^2$, pertanto deve esistere una relazione lineare della forma

$$a_1 y^2 + a_2 xy + a_3 y = a_4 x^3 + a_5 x^2 + a_6 x + a_7.$$

Consideriamo la funzione $x \times y: X \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}^2$; questa si estende a $f: X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ponendo $f(p) = [0, 1, 0]$. Questa estensione è continua perché y ha un ordine di polo in p maggiore di quello di x . Per il teorema di estensione di Riemann f è olomorfa. Quanto abbiamo appena detto mostra che f è a valori nella cubica C di equazione

$$a_1 Y^2 Z + a_2 XYZ + a_3 YZ^2 = a_4 X^3 + a_5 X^2 Z + a_6 XZ^2 + a_7 Z^3.$$

Vogliamo vedere che f dà luogo ad un biolomorfismo tra X e C . Per prima cosa f separa i punti di X . Prendiamo infatti $q_1, q_2 \in X$ distinti, e facciamo vedere che esiste una funzione $g \in \mathcal{L}(3p)$ che si annulli in q_1 ma non in q_2 . Questo è vero per motivi dimensionali: lo spazio delle funzioni in $\mathcal{L}(3p)$ che si annullano su q_1 è

$\mathcal{L}(3p - q_1)$, e ha dimensione 2, mentre $\mathcal{L}(3p - q_1 - q_2)$ ha dimensione 1, entrambi per Riemann-Roch.

Similmente dato $q \in X$ abbiamo un'inclusione stretta per motivi dimensionali $\mathcal{L}(3p-2q) \subsetneq \mathcal{L}(3p-q)$, pertanto esiste $g \in \mathcal{L}(3p)$ che si annulla di ordine esattamente 1 su q . Da questo segue che il differenziale di $f = x \times y$ è iniettivo in q .

In conclusione f è un embedding di X in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, con immagine contenuta in C . Da questo segue facilmente che $f(X) = C$, e dunque X e C sono biomorfe. \square

(2) \Rightarrow (1). Sia X una cubica in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ e L una retta che incontra X trasversalmente. Preso un punto p esterno a X e a L , consideriamo la proiezione

$$\pi: X \longrightarrow L$$

da p su L . Dato $q \in L$ la controimmagine $\pi^{-1}(q)$ è l'intersezione tra X e la retta pq , perciò per q generico ha cardinalità 3. Dunque π è un morfismo di grado 3; vediamo in quanti punti è ramificato. Per fare questo dobbiamo vedere se la retta pq è tangente a X ; questo avviene quando l'equazione di X ristretta a pq ha una radice di molteplicità almeno 2. Scegliamo coordinate proiettive in modo tale che $p = [0, 0, 1]$ e L sia la retta $\{[x, y, z] \mid z = 0\}$, di modo che la proiezione assume la forma

$$\pi([x, y, z]) = [x, y, 0].$$

Se l'equazione della cubica è $F = 0$, i punti di tangenza sono quelli in cui si annulla $\partial F / \partial z$. Questo è un polinomio omogeneo di secondo grado, e definisce perciò una quadrica Q . Per una scelta generica di p le superfici X e Q si incontrano trasversalmente in $2 \cdot 3 = 6$ punti. Questo fatto, per quanto intuitivo, non è immediato da giustificare. Poiché l'implicazione che stiamo trattando non è necessaria per dimostrare il teorema 9.1 non entreremo nel dettaglio (si può [Mir95, V.2.13] in proposito).

In conclusione abbiamo una ramificazione semplice (cioè con $v(y) = 2$) esattamente in 6 punti. Utilizzando ora la formula di Riemann-Hurwitz (6.2) per π si ricava $\chi(X) = 0$, ovvero X ha genere 1. \square

(1) + (2) \Rightarrow (3). Fissiamo un punto $O \in X$ e definiamo l'operazione di gruppo in due modi diversi. Il primo modo è geometrico, e utilizza il fatto che X è una cubica; da questa caratterizzazione risulta chiaro che l'operazione è olomorfa, ma non si vede la proprietà associativa. Il secondo modo è algebrico, tramite Riemann-Roch, e utilizza il fatto che X ha genere 1. Questa seconda interpretazione garantisce automaticamente l'associatività. Infine verifichiamo che le due operazioni così definite coincidono, ottenendo così una struttura di gruppo di Lie complesso su X .

Siano $p, q \in X$, eventualmente coincidenti. Consideriamo la retta L passante per p e q (tangente in p se $p = q$). Essendo X una cubica L interseca X in 3 punti, contati con molteplicità: sia r il terzo punto di intersezione. Definiamo $p + q$ come il terzo punto di intersezione della retta passante per O e per r con X . Questo definisce un'operazione

$$\mu: X \times X \longrightarrow X.$$

Per costruzione O è un elemento neutro per l'operazione, e l'inverso di p si trova come terzo punto di intersezione tra la retta per p e per O e la cubica X . L'operazione è definita in modo che $p + q + r = O$; dal teorema di inversione locale è immediato che r dipende in maniera olomorfa da p e q , e dunque μ è olomorfa.

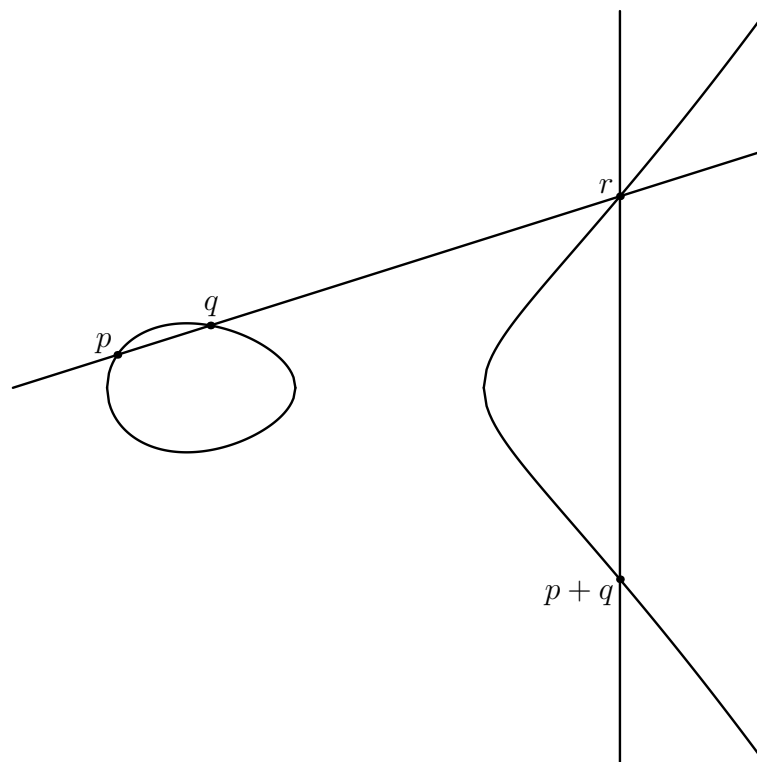


FIGURA 3. Addizione di punti su una cubica. Nella figura il punto O è a nord sulla retta all'infinito, cosicché la retta Or risulta verticale.

Diamo adesso una seconda versione della legge di gruppo. Sia D un divisore su X di grado 0: da Riemann-Roch segue che esiste un unico $p \in X$ tale che D è equivalente a $p - O$. Questo dà una corrispondenza biunivoca tra X e l'insieme $\text{Pic}^0(X)$ dei divisori di grado 0 modulo equivalenza lineare. $\text{Pic}^0(X)$ eredita da $\text{Div}(X)$ una legge di gruppo, essendo l'omologia del complesso

$$\mathcal{M}^*(X) \longrightarrow \text{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Tramite la corrispondenza biunivoca si ottiene su X una legge di gruppo

$$\mu': X \times X \longmapsto X.$$

Infine dobbiamo vedere che $\mu = \mu'$. Ci basta verificare che se p, q ed r sono allineati, allora $p + q = -r$ tramite la legge di gruppo μ' . Questo equivale al fatto che $p + q + r - 3O$ è linearmente equivalente a 0. Scegliamo coordinate su \mathbb{CP}^2 in modo che O sia sulla retta all'infinito e p, q, r sull'asse y . Allora la funzione x è una funzione meromorfa su X , che si annulla in p, q ed r ed ha un polo di ordine 3 su O . \square

Per dimostrare la prossima implicazione utilizzeremo alcune proprietà dei gruppi di Lie e delle algebre di Lie associate, che si trovano ad esempio in [Lee03, cap. 15] o in [OV93].

(3) \Rightarrow (4). Sia X un gruppo di Lie complesso compatto di dimensione 1. L'algebra di Lie \mathfrak{r} di X ha dimensione 1, quindi il bracket di Lie è identicamente nullo. Consideriamo \mathbb{C} come gruppo di Lie; anch'esso ha algebra di Lie banale. Prendiamo un isomorfismo $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{r}$, che è automaticamente un isomorfismo di algebre di Lie.

Essendo \mathbb{C} semplicemente connesso, questo si solleva ad un omomorfismo di gruppi di Lie $\phi: \mathbb{C} \rightarrow X$, che è un isomorfismo locale, perché $d\phi = \varphi$ è un isomorfismo. Ne segue che $\ker \phi$ è discreto, e per il lemma 10.1 $\ker \phi$ è generato da al più 2 vettori linearmente indipendenti su \mathbb{R} . Inoltre ϕ induce un isomorfismo tra $\mathbb{C}/\ker \phi$ e X , e per la compattezza di X , $\ker \phi$ deve avere rango 2, cioè essere un reticolo in \mathbb{C} . \square

Alcune osservazioni sulla proposizione 10.3.

- La dimostrazione dell'implicazione (2) \Rightarrow (1) permette, più in generale, di ottenere la seguente

Proposizione 10.4 (formula del genere). *Sia X una superficie di grado d liscia in $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. allora X ha genere*

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

- L'implicazione (3) \Rightarrow (4) è valida in qualsiasi dimensione. Ogni gruppo di Lie complesso compatto è un toro complesso. La dimostrazione è sostanzialmente la stessa, soltanto che nel caso generale il fatto che l'algebra di Lie sia abeliana non è ovvio e segue anch'esso dalla compattezza.
- Alcune delle implicazioni mancanti si possono dimostrare direttamente. Ad esempio (3) \Rightarrow (1) segue dalla formula di Lefschetz. Sia infatti G un gruppo di Lie reale connesso per archi, e sia

$$l_g: G \rightarrow G$$

la moltiplicazione a sinistra per un elemento $g \in G$. Per le proprietà di gruppo l_g non ha punti fissi, perciò il teorema di punto fisso di Lefschetz dà $L(l_g) = 0$. D'altronde un cammino che unisca g con l'identità dà luogo ad un'omotopia tra l_g e $l_e = \text{id}_G$. Perciò $\chi(G) = L(\text{id}_G) = L(l_g) = 0$; nel caso in cui G abbia dimensione reale 2 il teorema di classificazione mostra che G ha genere 1.

11. IL TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE IN GEOMETRIA CONFORME

In questo paragrafo vogliamo dare una versione sostanzialmente equivalente del teorema di uniformizzazione, nell'ambito della geometria riemanniana. L'enunciato che daremo ha senso nella geometria differenziale reale, e non mette in gioco la geometria complessa delle superfici di Riemann. Per le nozioni di base di geometria riemanniana sulle superfici rimandiamo a [dC76].

Ricordiamo che se V è uno spazio vettoriale reale con una metrica euclidea $(\cdot, \cdot)_V$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sono vettori non nulli, l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{w} è definito da

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w}}) = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w})_V}{\|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V}.$$

La seguente proposizione è un esercizio di algebra lineare.

Proposizione 11.1. *Sia $A: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare invertibile tra spazi euclidei. Sono equivalenti:*

- (1) *A conserva gli angoli tra vettori;*
- (2) *$A = \lambda B$, dove B è un'isometria e $\lambda \in \mathbb{R}^*$;*
- (3) *$(Av, Aw)_W = \lambda^2(v, w)_V$ per ogni $v, w \in V$.*

In questo caso A si dice conforme.

Definizione 11.2. Siano g_1, g_2 due metriche riemanniane su una varietà differenziabile reale M . Diremo che g_1 e g_2 sono *conformi* se in ogni punto sono l'una un multiplo scalare dell'altra, ovvero esiste una funzione $\lambda \in C^\infty(X)$ tale che $g_1 = \lambda g_2$. Se $f: M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, diremo che f è un'equivalenza conforme se la metrica $f^*(g_N)$ è conforme a g_M . Una *classe conforme* su M è una classe di equivalenza conforme di metriche riemanniane su M .

Per la proposizione 11.1 un diffeomorfismo f è conforme se e solo se $d_p f$ conserva gli angoli in ogni punto $p \in M$.

Su \mathbb{R}^2 con la metrica usuale ogni isometria lineare ha la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a^2 + b^2 = 1$. Possiamo perciò parafrasare le equazioni di Cauchy-Riemann nel modo seguente:

Proposizione 11.3. *Se U e V sono aperti di \mathbb{C} e $f: U \rightarrow V$ è un diffeomorfismo orientato, allora f è conforme se e solo se f è olomorfa.*

Il caso in cui f inverte l'orientazione corrisponde invece al fatto che f sia antiolomorfa. In particolare se X è una superficie di Riemann, ogni cambiamento di carta per X è conforme; ne segue che è ben definito l'angolo tra due vettori tangenti a X , angolo che può misurato in una qualsiasi carta.

Il risultato di uniformizzazione in geometria riemanniana è il seguente.

Teorema 11.4. *Sia M una superficie reale orientata. Allora ogni classe conforme su M contiene una metrica a curvatura costante.*

Iniziamo con l'osservare che il risultato è vero per i tre modelli semplicemente connessi di superfici di Riemann.

- \mathbb{C} ammette la metrica standard g_{st} , che ha curvatura nulla.
- Il disco D è un modello del piano iperbolico, con la metrica

$$g_{hyp} = \frac{4}{(1 - |z|^2)^2} g_{st}.$$

Si verifica direttamente che la curvatura è costante -1 .

- La retta proiettiva $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ è diffeomorfa a S^2 . Con l'usuale metrica g_{sph} indotta da \mathbb{R}^3 , S^2 ha curvatura costante 1.

Osserviamo che non è necessario fare conti per verificare che S^2 ha curvatura costante: infatti il gruppo $SO(3)$ agisce su S^2 per isometrie in maniera transitiva. Un simile argomento funzionerà per D una volta che sapremo che le isometrie della metrica iperbolica agiscono su D in modo transitivo.

Osserviamo anche che gli angoli misurati su queste varietà dalle rispettive metriche sono gli stessi misurati dalle strutture complesse. Questo fatto è ovvio per \mathbb{C} ; per D segue dal fatto che per definizione la metrica iperbolica è conforme a quella piatta. La verifica per $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ è leggermente meno banale, perché non è coperto da una sola carta. Bisogna verificare che le carte complesse sugli aperti standard

sono equivalenze conformi tra gli aperti e \mathbb{C} . In effetti queste carte sono date dalla proiezione stereografica dai due poli, ed è ben noto che la proiezione stereografica conserva gli angoli.

Ne segue che se X è una tra \mathbb{C} , D e $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ e $f: X \rightarrow X$ è un diffeomorfismo orientato, allora f è conforme se e solo se è un biolomorfismo. In particolare il teorema 9.5 si trasforma in questo modo in un risultato di classificazione degli automorfismi conformi. Non tutti gli automorfismi conformi sono in generale isometrie. Tuttavia questo è vero nel caso di D .

Proposizione 11.5. *Sia $f: D \rightarrow D$ un'omografia. Allora f è un'isometria per la metrica iperbolica.*

Poiché le omografie agiscono transitivamente su D , abbiamo il

Corollario 11.6. *(D, g_{hyp}) ha curvatura costante.*

Per dimostrare il teorema di uniformizzazione dobbiamo approfondire il rapporto che c'è tra metriche e strutture complesse su una superficie orientata M . Abbiamo visto che una classe conforme consente di misurare gli angoli su M , e lo stesso è vero per una struttura di superficie di Riemann.

Definizione 11.7. Sia M una varietà reale. Una *struttura quasi-complessa* su M è una sezione J di $\text{End}(TM)$ che soddisfa $J(p)^2 = -\text{id}_{T_pM}$.

In altre parole in ogni punto della varietà abbiamo un automorfismo a quadrato $-\text{id}$, dipendente in modo C^∞ dal punto. Se M è una varietà complessa, il fibrato tangente reale è canonicamente isomorfo al fibrato tangente olomorfo (visto come fibrato reale). Ma il tangente olomorfo è un fibrato complesso, su cui è definita la moltiplicazione per i , che dà in questo modo una struttura quasi-complessa.

Torniamo per semplicità al caso in cui M è una superficie orientata. Data una metrica g la rotazione di $\pi/2$ in senso orario è un automorfismo a quadrato $-\text{id}$, perciò dà luogo ad una struttura quasi-complessa J . Se $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è una base ortonormale orientata di T_pM , allora J è determinata da

$$\begin{cases} J(p)\mathbf{v} = \mathbf{w} \\ J(p)\mathbf{w} = -\mathbf{v}. \end{cases}$$

Chiaramente J dipende solo dalla classe conforme di g . Viceversa data una struttura quasi-complessa J , possiamo costruire una metrica g , determinata a meno di equivalenza conforme, richiedendo che se $\mathbf{v} \in T_pM$ è non nullo, $\{\mathbf{v}, J(p)\mathbf{v}\}$ sia una base ortonormale. Una diversa scelta di \mathbf{v} cambia g_p solo per equivalenza conforme. In conclusione su una superficie orientata il dato di una classe conforme e quello di una struttura quasi-complessa sono equivalenti.

Resta da capire quali tra le strutture quasi-complesse provengano effettivamente da strutture complesse. In dimensione 2 siamo fortunati:

Teorema 11.8 (Newlander-Nirenberg). *Sia J una struttura quasi-complessa su una superficie orientata M . Allora esiste su M un'unica struttura di superficie di Riemann che induce J .*

Osserviamo che dal teorema otteniamo nuovamente come corollario la proposizione 8.3. Infatti, con la notazione della proposizione, sia g una metrica che misura gli stessi angoli della struttura complessa su Ω . Possiamo estendere g ad una metrica riemanniana su $\Omega \uplus \Omega$, ottenendo così una struttura quasi-complessa. Per il

teorema questa proviene da una struttura complessa su $\Omega \uplus \Omega$, che estende perciò quella di Ω .

Non diamo una dimostrazione del teorema 11.8, rimandando per un enunciato più generale a [Dem97, cap. VIII]; ci limitiamo a mostrare come questo sia in realtà un risultato sulle equazioni alle derivate parziali in dimensione 2. Innanzitutto osserviamo che date due varietà con strutture quasi-complesse è ben definito il concetto di mappa olomorfa.

Definizione 11.9. Siano (M, J_M) e (N, J_N) due varietà dotate di strutture quasi-complesse. Una mappa $C^\infty f: M \rightarrow N$ si dice olomorfa se per ogni $p \in M$ e per ogni $\mathbf{v} \in T_p M$ si ha

$$J_N(f(p))(d_p f(\mathbf{v})) = d_p f(J_M(p)\mathbf{v}). \quad (11.1)$$

Nel caso di varietà complesse, stiamo richiedendo che il differenziale sia \mathbb{C} -lineare, e riotteniamo l'usuale concetto di mappa olomorfa.

Per dimostrare il teorema 11.8 ci basta trovare un atlante per M fatto da carte che siano olomorfe rispetto all'usuale struttura complessa sugli aperti di \mathbb{C} e alla struttura J su M . Due tali carte sono automaticamente compatibili in senso complesso. Ne segue che l'enunciato è locale, e possiamo supporre che la varietà M sia un intorno U di 0 in \mathbb{R}^2 .

Sia $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, dove a, b, c, d sono funzioni C^∞ su U . Sia data una mappa $f = u + iv: U \rightarrow \mathbb{C}$; la condizione (11.1) di olomorfia può essere verificata solo su una base. D'altra parte se la (11.1) è valida per \mathbf{v} , lo è automaticamente per $J(p)\mathbf{v}$; pertanto possiamo limitarci a verificarla su $\mathbf{v} = \partial_x$. Poiché $J\partial_x = a\partial_x + c\partial_y$, la (11.1) equivale al sistema

$$\begin{cases} -v_x &= au_x + cu_y \\ u_x &= av_x + cv_y \end{cases} \quad (11.2)$$

Il teorema di Newlander-Nirenberg è dimostrato una volta che si sappia che il sistema (11.2) ha una soluzione locale con $d_0 f$ non singolare, in modo che f sia un diffeomorfismo locale intorno a 0. Osserviamo che le funzioni a e c non si annullano contemporaneamente; supponiamo ad esempio che $c(0) \neq 0$ e dunque $c \neq 0$ su U , a meno di restringere U . Possiamo allora esplicitare le derivate di u ottenendo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u_x &= av_x + cv_y \\ -u_y &= \frac{1+a^2}{c}v_x + av_y. \end{cases} \quad (11.3)$$

Se (11.3) è soddisfatto, il determinante Jacobiano di f vale

$$J_f = u_x v_y - u_y v_x = \frac{1}{c} (v_x^2 + (av_x + cv_y)^2),$$

pertanto se v è non singolare in 0, anche f lo è. Per il lemma di Poincaré il sistema (11.3) si risolve localmente in u se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial y} (av_x + cv_y) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1+a^2}{c}v_x + av_y \right) = 0. \quad (11.4)$$

In conclusione il teorema di Newlander-Nirenberg si riconduce a mostrare l'esistenza di una soluzione locale v per la (11.4) che soddisfi la condizione aggiuntiva $(v_x(0), v_y(0)) \neq (0, 0)$. Noi non entriamo però nel merito della soluzione di questa equazione differenziale, per non allontanarci troppo dal tema del teorema di uniformizzazione.

Possiamo adesso dimostrare il teorema 11.4.

Dimostrazione. Supponiamo di avere su M una classe conforme, abbiamo visto che ciò è equivalente a dire che M è una superficie di Riemann. Sia \widetilde{M} il rivestimento universale, e scriviamo $M = \widetilde{M}/G$, dove G è un gruppo di automorfismi della struttura complessa di \widetilde{M} . Per il teorema 1.2 abbiamo tre casi.

- Se $\widetilde{M} = \mathbb{CP}^1$, allora $M = \widetilde{M}$, perciò la metrica sferica va bene.
- Nel secondo caso $\widetilde{M} = \mathbb{C}$; abbiamo visto che in questa situazione G è un sottogruppo discreto di traslazioni di \mathbb{C} . Ma le traslazioni sono isometrie, perciò la metrica piatta induce al quoziente una metrica g su M che rende la proiezione un'isometria locale. In particolare g ha curvatura nulla.
- Nel terzo caso $\widetilde{M} = D$, e sappiamo solo che G è un sottogruppo di $\text{Aut}(D)$. Ma la proposizione 11.5 garantisce che G agisce per isometrie, e come nel caso precedente si conclude che M eredita una metrica di curvatura costante.

□

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Car95] HENRI CARTAN, *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*, Dover books on mathematics, Dover Publications Inc., 1995.
- [dC76] MANFREDO P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [Dem97] JEAN-PIERRE DEMAILLY, *Complex analytic and differential geometry*, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.ps.gz>, 1997.
- [FK92] HERSCHEL M. FARKAS E IRWIN KRA, *Riemann surfaces (second edition)*, Graduate Texts in Mathematics, **71**, Springer-Verlag, 1992.
- [GH94] PHILLIP GRIFFITHS E JOSEPH HARRIS, *Principles of algebraic geometry*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [Hat02] ALLEN HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [Hir99] MORRIS W. HIRSCH, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, 1999.
- [KK05] KANG-TAE KIM E STEVEN G. KRANTZ, *The automorphism group of domains*, American mathematical monthly **112** (2005), 585–595.
- [Lan99] SERGE LANG, *Complex analysis (fourth edition)*, Graduate Texts in Mathematics, **103**, Springer, 1999.
- [Lee03] JOHN M. LEE, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, **218**, Springer, 2003.
- [Mil97] JOHN W. MILNOR, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, 1997.
- [Mir95] RICK MIRANDA, *Algebraic curves and riemann surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, **5**, American Mathematical Society, 1995.
- [OV93] ARKADI L. ONISCHICK E ÉRNEST B. VINBERG, *Foundations of lie theory*, Lie groups and Lie algebras I (A cura di Arkadi L. Onischick), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **20**, Springer-Verlag, 1993.

E-mail address: a.ferretti@sns.it